

# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, BAND 17, HEFT 4, JUNI 1933

## *Die Messung der Wärmeleitung in Gasen*

*Von Max Trautz und Alfred Zündel*

(Mitteilung aus dem Physikalisch-Chemischen Institut der Universität Heidelberg)

(Mit 1 Figur)

Inhalt: I. Vorversuche mit einem Apparat nach Eucken: A. Beschreibung der Methode; B. Wahl der Schaltung: 1. Schaltung von Eucken; 2. Schaltung von Moser; 3. Schaltung von Gregory und Archer; C. Ergebnis der Vorversuche. — II. Beschreibung des verwendeten Blockapparates und der übrigen Anordnung: A. Der Blockapparat; B. Die Schaltung; C. Der nichtelektrische Teil der Anordnung: 1. Darstellung der verwendeten Gase (Luft, CO, CO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub> und Flaschengase); 2. Glasapparatur; 3. Thermostaten. — III. Messungen mit den neuen Apparaten: A. Widerstandsmessungen: 1. Alterung der Drähte; 2. Meßverfahren; 3. Korrektur der Galvanometeraussschläge auf Kreisskala; 4. Proportionalität zwischen Stöpselung am Vergleichswiderstand und Galvanometeraussschlag; 5. Stromstärke bei den Widerstandsmessungen; 6. Leitungskorrekturen; 7. Drahtwiderstände und Widerstandstemperaturkoeffizienten; B. Wärmeleitungsmessungen: 1. Gang der Messung; 2. Gang der Berechnung der Wärmeleitzahlen; 3. Genauigkeit der gemessenen Einzelwerte; 4. Kritik und Korrektur der Kurve  $\lambda_{r,g} - \Delta w$ : a) Der durch das Rechnen mit  $(l+k):(l-k)_k$  bedingte Fehler; b) Einfluß der Strahlung; c) Konvektion; d) Temperaturkoeffizient  $\beta$  der Wärmeleitzahl; e) Ungenügende Kompensation der Drahtenden; f) Sonstige Möglichkeiten; 5. Abhängigkeit der Wärmeleitzahl vom Druck. Temperatursprung; C. Mitteilung der Meßergebnisse: 1. Wärmeleitzahlen für CO<sub>2</sub>, CO, CH<sub>4</sub>, Ar, CH<sub>3</sub>R, Propan; 2. Der Einfluß der Meßgase auf den Apparat, Deutung der Unstimmigkeiten durch Änderung des Widerstandstemperaturkoeffizienten des Heizdrahtes, der Konvektion, der Gasfüllung, des Heizdrahtwiderstandes und der Drahtoberfläche. — Zusammenfassung. — Literatur.

Der erste Teil dieser Arbeit(1) war ein Bericht über den Stand der Messung des Wärmeleitvermögens von Gasen. Mit der Zusammenstellung der einzelnen Methoden verbanden wir ihre kritische Würdigung, um die Sicherheit der bereits gemessenen, meist stark differierenden Werte zu beurteilen, die für unsere eigenen Messungen geeignetste Methode festzustellen und uns so bereits gemachte Erfahrungen zunutze zu machen.

**I. Vorversuche mit einem Apparat nach Eucken****A. Beschreibung der Methode**

Dabei kamen wir zu der Überzeugung, daß die Schleiermachersche Hitzdrahtmethode in der von Herrn Eucken<sup>1)</sup> verwendeten Form wohl am raschesten zu genügend sicheren Zahlenwerten führen würde.

Wir wandten uns daher dieser Methode zu: Achsial in einer Metallkapillare, die das Meßgas enthält, ist ein elektrisch heizbarer Platindraht ausgespannt. Gemessen wird die in den Draht geschickte elektrische Energie und die mit ihr in dem untersuchten Gas erreichte Temperaturerhöhung des Drahtes. Aus diesen beiden Daten ergeben sich absolute oder relative Werte der Wärmeleitfähigkeit des Gases. Um die Wärmeableitung durch die Drahtenden zu eliminieren schaltet Herr Eucken dem Draht ( $l$ ) in einer Brücke einen kürzeren, in einer zweiten gleichweiten Kapillare ausgespannten Draht ( $k$ ) entgegen, so daß ein mittleres vom Einfluß der Enden befreites Stück des Drahtes  $l$  [Meßstück ( $l-k$ )] zur Messung verwendet werden kann. Beide Metallkapillaren waren auf einen Kupferstab gelötet und vertikal in Glas eingeschmolzen.

Technische Einzelheiten vgl. Eucken (2) und Moser (3).

**B. Wahl der Schaltung**

Die Euckensche Methode wurde in 3 Formen benützt. Sie stimmen in der Verwendung einer Wheatstoneschen Brückenschaltung zur Messung der Widerstände des kalten und des heißen Drahtes, beide als Maß der Drahtüberhitzung, letzterer als das eine Stück der Energiemessung, überein. Die Unterschiede liegen in der Wahl der zweiten, zur Bestimmung der im Heizdraht in Wärme umgesetzten elektrischen Energie erforderlichen Größe.

**1. Die Euckensche Schaltung**

Herr Eucken (2) selbst maß mit Kompensationsapparat die am Vergleichswiderstand  $w$  liegende Spannung, die gleich ist dem gesuchten Spannungsabfall über das Meßstück. Die so gemessenen Spannungen dienen direkt zur Berechnung von Relativwerten.

Dies ist einwandfrei, wenn alle Leitungsdrähte der Brücke bezüglich ihrer Widerstände symmetrisch zu den Anlegestellen des Nullinstrumentes sind und diese Symmetrie auch durch etwaige Erwärmung der Leitungen beim Heizen nicht gestört wird. (Materialverlust beim Zusammenschweißen der Drähte oder ungenaue Vermessung der im

1) Herrn Eucken verdanken wir die Mitteilung, daß diese Methode der Ausschaltung des Einflusses der Drahtenden bei Wärmeleitungsmessungen erstmalig von ihm verwendet wurde, und daß der Goldschmidtsche Apparat nach seinen Anweisungen gebaut wurde.

Apparat selbst liegenden, aus technischen Gründen schwachen Leitungen.) Herr Eucken schreibt: „Die Stromzuführung (zum Apparat) erfolgte durch in das Glas eingeschmolzene Platindrähte; auf besondere Stärke der Zuführungsdrähte kam es, da ja die beiden Drähte gegeneinander geschaltet waren, nicht an“.

Mit der Euckenschen Anordnung wesensgleich ist die von Inardi (4) (statt Kompensationsapparat Voltmeter bekannten inneren Widerstandes).

## 2. Die Mosersche Schaltung. (Fig. 1)

Herr Moser (3), der mit dem Euckenschen Apparat weiterarbeitete, maß mit einem Voltmeter den Spannungsabfall  $E$  über die ganze Brücke. Er muß also, um den Spannungsabfall  $e$  über das Meßstück zu bekommen, umrechnen: „Um die Spannung an den Vergleichswiderständen zu erhalten, müssen die am Voltmeter gemessenen Ausschläge noch mit einem Korrektionsgliede multipliziert werden, das sich aus den Widerständen  $l$  und  $k$  leicht berechnet“. Bezüglich der Leitungswiderstände verweist Moser auf die oben bereits zitierte Stelle bei Eucken.

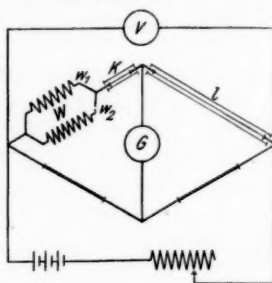


Fig. 1. Schaltung nach Moser

Es kann daher auch auf das hierzu bereits Vermerkte verwiesen werden. Das im Zitat genannte, leicht zu berechnende Korrektionsglied ist  $(l + k) : (l - k)_k$  der kalten Drähte, welches bei Moser aus  $(l - k)_h$ , dem gemessenen Widerstand des geheizten Meßstücks, das zugehörige  $(l + k)_h$  liefert, das zur Berechnung von  $e$  aus  $E$  erforderlich ist. Da aber bei geheizten Drähten die Wärmeableitung durch die Drahtenden den Widerstand des kurzen Drahtes prozentual mehr erniedrigt als den des langen, kann diese Berechnung von  $(l + k)_h$  nur näherungsweise richtig sein.

Zur Bestimmung des Fehlers wurde von uns die Stromstärkeabhängigkeit der Widerstände  $l, k$  und  $l + k$  gemessen und daraus nach Anbringung der Leitungskorrekturen die von  $(l - k)$  berechnet. Trägt man nun für die vier Widerstände die Werte  $\log(w_h : w_k)$  gegen  $i$  auf, so zeigt sich, daß die Kurven nicht zusammenfallen, vielmehr in der Reihenfolge  $k, l + k, l, l - k$  immer steiler ansteigen; aus der mit  $i$  zunehmenden gegenseitigen Entfernung der Kurven folgt direkt

$$\frac{(l + k)_h}{(l - k)_h} < \frac{(l + k)_k}{(l - k)_k}$$

Tab. 1 gibt einige Zahlwerte. Für eine Überhitzung von  $10^\circ \text{C}$  bei Heizdrähten von 0,05 mm Durchmesser ergibt die Mosersche Berechnungsweise die Wärmeleitwerte um rund 0,1 % zu klein. Der Fehler

wäre bei besser leitenden Gasen kleiner und würde mit der Drahtdicke zunehmen. Er ist bei der Messung einzelner Wärmeleitzahlen nicht zu vernachlässigen, wird aber durch die später mitgeteilte Extrapolation auf Drahtüberhitzung 0 eliminiert.

Tabelle 1  
(Apparat II. Füllung  $\text{CO}_2$ )

Stromstärke $i$ Amp.	Drahttemperatur ° C	$\left(\frac{l+k}{l-k}\right)_h$ gemessen als $f(i)$	Differenz gegen $\left(\frac{l+k}{l-k}\right)_k$ in $^\circ/\infty$
0,00	0,0	(1,3562)	—
0,01	0,2	1,3559	0,2
0,03	1,2	1,3558	0,3
0,05	3,3	1,3554	0,6
0,07	6,4	1,3550	0,9
0,08	8,4	1,3549	1,0

### 3. Die Schaltung von Gregory und Archer

Die dritte, von Gregory und Archer (5), (6) verwendete Art besteht in der Messung der Stromstärke in dem die Heizdrähte enthaltenden Brückenweig durch Kompensation des Spannungsabfalles über einen in den Brückenweig geschalteten Normalwiderstand. Dies ist ebenfalls nur bei symmetrischer Brücke einwandfrei.

Gewählt wurde die Mosersche Schaltung wegen ihrer universellen Verwendbarkeit.

### C. Ergebnis der Vorversuche

Vorversuche befriedigten nicht, gaben aber Hinweise für den Bau neuer Apparate:

Neben der Untersuchung der Reproduzierbarkeit der Messungen war vor allem beabsichtigt, den Einfluß der Stromstärke auf die Wärmeleitzahlen in einem weiteren Bereiche zu erforschen. Es zeigte sich dabei, daß auch bei schlecht leitenden Gasen und geringen Drahtüberhitzungen die Wände der Kapillaren sich merklich erwärmen. Dies bewirkt einen entsprechenden Anstieg von Temperatur und Widerstand des Heizdrahtes, weil die durch die Einstellung des Vorschaltwiderstandes gegebene Stromstärke ja in erster Näherung immer eine bestimmte Übertemperatur des Drahtes gegenüber der umgebenden Kapillare aufrecht zu erhalten vermag. So kommt eine dauernde Verschiebung des Brückengleichgewichtes und damit der Galvanometereinstellung zustande, die für die Berechnung auf die Zeit 0 extrapoliert werden muß. Dies ist jedoch nur bei schlecht leitenden Gasen und kleinen Überhitzungen des Meßdrahtes durch gerade Linie möglich, bei größeren Wärmestromdichten streben die Erwärmungskurven einem konstanten Wert zu, der durch eine stationäre Wärmeströmung Draht  $\rightarrow$  Kapillare  $\rightarrow$  Block und Temperaturbad zu erklären ist. Die Extrapolation ist dann nicht mehr zwingend, ganz abgesehen von dem Zeitaufwand,



den das Messen und Auswerten der Kurven erfordert. Dazu beeinträchtigt die Erhöhung der Blocktemperatur zusammen mit der Abkühlung in den Meßpausen die Genauigkeit der gemessenen Widerstandsdifferenzen zwischen heißem und kaltem Draht, des empfindlichsten Stückes des Messung, ganz erheblich.

Außerdem machen hier angestellte Untersuchungen wahrscheinlich, daß die Kapillarwandtemperatur nach dem Abstellen des Heizstromes rasch auf einen Betrag abfällt, der der Temperatur des erwärmten Blockes entspricht, um dann langsamer, in etwa 20 Min., auf die ursprüngliche, dem Temperaturbad entsprechende Größe zu sinken. Daraus würde sich ergeben, daß während der Messung der Wärmeleitfähigkeit die Kapillare an der vom Block abgewandten Seite heißer war als an der Seite, wo sie auf den Block aufgelötet ist, was eine mit dem Grad der Überhitzung steigende Unsymmetrie der zylindrischen Wärme-strömung zur Folge hätte.

Bei höheren Temperaturen machte sich die Kleinheit des Blockes durch eine geringe Fähigkeit über die Temperaturschwankungen des Thermostaten zu integrieren, unangenehm bemerkbar.

Das Bestreben, auch diese kleinen Unsicherheiten nach Möglichkeit auszuschalten, sowie Messung und Rechnung zu vereinfachen, war neben dem Gedanken, durch Messen mit mehreren Apparaten Anhaltspunkte für die Absolutgenauigkeit des Gemessenen zu erhalten, der Anlaß für den Bau von 2 Blockapparaten, bei denen die Kapillaren in einen größeren Kupferblock eingebaut sind; dadurch ist eine bessere Temperaturkonstanz der Kapillarenwände und eine nach allen Seiten hin gleiche Wärmeableitung gewährleistet.

## II. Beschreibung des verwendeten Blockapparates und der übrigen Anordnung

### A. Der Blockapparat<sup>1)</sup>

Der Einbau der Kapillaren in den Block macht eine geeignete Zerlegbarkeit des ganzen Apparates erforderlich. Dieser besteht daher aus folgenden 6, bequem auseinandernehmbaren Teilen:

- I. Blockrumpf mit Kapillaren und Mittelwand;
- II. Deckelplatte mit Spannvorrichtung für die Heizdrähte;
- III. Bodenplatte;
- IV u. V. Ergänzungsstücke zur Vergrößerung der Wärmekapazität;
- VI. Zweiteiliger Mantel zur Verhinderung von Strömungen im Meßgas.

Die Kupferkapillaren sind 28 bzw. 108 mm lang, haben 1 mm l. W. und tragen an ihren Enden in Erweiterungen Glasrohrstückchen, die als zentrale Führung für die 0,3 mm starken Platinzuleitungen zu den Heizdrähten dienen. Die unteren Zuleitungen sind festgeklemt und mit dem Block verlötet, die oberen hängen über eine Isolationsglasperle an

1) Für den Bau zweier Apparate nach unseren Angaben danken wir der Firma W. C. Heraeus, Hanau.

Spannfedern und sind durch Silberdrähte (0,3, dann 1 und 2 mm stark) verlängert. Die einzelnen Teile wurden vor dem Zusammensetzen genauestens gereinigt. Die Kapillaren waren gegen das Licht gehalten spiegelnd blank. Nach dem Einziehen der Heizdrähte (zuerst enthielten beide Apparate 0,05 mm starke Heizdrähte aus Platin, App. I u. II; da sie übereinstimmende Resultate lieferten, wurden in den einen 0,04 mm starke Drähte, App. III, eingezo-gen) wurde der Block zusammengeschaubt, auf Widerstand, Isolation und Federspannung geprüft und in eine ungefähr 5,5 cm weite Glasröhre eingeschmolzen; er ruht auf in der Bodenplatte befestigten Glimmerscheiben und ist durch Glimmerringe in seiner Lage festgehalten. An die Glashülle sind oben ein weites Gaszuleitungsrohr und 3 enge Glasröhrchen für die Stromzuleitungen angeblasen.

### B. Die Schaltung

Die Schaltung ist die von Moser verwendete (Fig. 1). Darüber hinaus bemühten wir uns, den Widerstand der Zuleitungen möglichst niederzuhalten und ihn möglichst genau zu kennen. Daher dienten zur Verbindung der Blockapparate mit den auf einem Meßtisch vereinigten Meßinstrumenten, sowie zur gegenseitigen Verbindung derselben ausschließlich isolierte 25 mm<sup>2</sup> Kupferkabel. Ihr Widerstand war allerdings noch nicht vernachlässigbar klein, jedoch konnte seine Veränderung mit den Schwankungen der Zimmertemperatur vernachlässigt werden. Alle Leitungsanschlußpunkte der Apparate und der Instrumente wurden mit in einem Schaltkasten vereinigten Quecksilberkontakten verbunden, die so angeordnet waren, daß die während einer Messung erforderlichen Umschaltungen durch Umlegen von Wippen und Kupferbügeln ausgeführt werden konnten.

Stromquellen waren zwei anderweit nicht benützte Batterien (10 Volt, 150 Amp.Std. und 8 Volt, 150 Amp.Std.). Der Batteriestrom ging über einen Hebelschalter, einen technischen Regulierwiderstand (0,1 bis 10000 Ohm) und ein Amperemeter zum Schaltkasten. Hinter Amperemeter und Regulierwiderstand lag das Voltmeter (Präzisions-Universal-Drehspulinstrument, Hartmann & Braun, WLaV) mit seinen Anschlußkabeln. Im Schaltkasten durchlief der Batteriestrom erst eine Stromumkehrwippe, die so gebaut war, daß der Strom bei beiden Richtungen gleich lange Leitungsstücke durchfloß. Über einige Quecksilberkontakte, die auch Wechselstrom von einem Funkeninduktor verwenden ließen, ging der Strom zur Brücke. Als Verzweigungspunkte dienten die beiden Klemmen eines Präzisionswiderstandskastens (Fritz Köhler, Leipzig), der die eine Hälfte der Brücke mit den gleichen Widerständen lieferte. Als solche konnten die in Tab. 7 angegebenen Widerstandspare gestöpselt werden. Zwischen sie war mittels Klemmenstöpsels die eine, auch über den Schaltkasten führende, Leitung zum Nullinstrument gelegt. Die zweite Brückenhälfte bilden nun der lange Heizdraht  $l$  einerseits und der kurze Heizdraht  $k$  mit dem Vergleichswiderstand  $w$  andererseits. Er bestand aus zwei parallel geschalteten Widerständen:  $w_1$ , (einem Kasten, Fritz Köhler, 0,1–2000 Ohm) und  $w_2$ , (zwei hintereinander geschalteten Kästen, Ruhstrat, Göttingen, 0,1–1

und 1–10 stöpselbaren Ohm). Der eine Anlegepunkt der Leitung zum Nullinstrument wurde bereits genannt. Der zweite ist der Kupferblock. Als Nullinstrument konnte mittels einer Wippe zuerst ein Galvanometer (Turminstrument von Siemens-Halske) zur Grobeinstellung, sodann ein Spiegelgalvanometer (Edelmann, München; — Empfindlichkeit bei 1 m Skalenabstand 1 mm =  $3 \cdot 10^{-9}$  Amp.; Fernrohr Siemens-Halske, 40 fache Vergrößerung auf dem Meßtisch) zur Feineinstellung und Widerstandsinterpolation verwendet werden. Vor ersterem lag ein auf Dauerkontakt stellbarer Schalter. Ein Quecksilberkontaktschalter vor dem Edelmanninstrument ermöglichte, das Instrument entweder an die Brücke zu legen oder zur raschen Einstellung der Nullage über einen Widerstand in sich kurz zu schließen. Die Anordnung der Quecksilberkontakte zu beiden Blockapparaten und zu den Instrumenten erlaubte, durch Umlagen weniger Bügel sowohl den einen oder den anderen Apparat an die Brücke anzuschließen, als auch bei den einzelnen Apparaten die beiden Heizdrähte nicht nur in Differenz sondern auch in Summe und einzeln zu messen. Sämtliche Instrumente waren frisch von den Firmen geprüft und garantierten Ablesungen von mindestens 1 p. T. Genauigkeit.

Eine genügend erschütterungsfreie Aufstellung von Galvanometer, Fernrohr und Skala war wegen naher Verkehrsstraße und Eisenbahn nicht möglich. Es wurden daher nahezu alle Messungen bei Nacht ausgeführt. Es hatte dies den Vorteil, daß auch die Blockapparate nicht erschüttert wurden, was ein Schwingen der Heizdrähte zur Folge haben könnte.

### C. Der nichtelektrische Teil der Anordnung

#### 1. Darstellung der verwendeten Gase (Luft, CO, CO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub> und Flaschengase)

Bei der Darstellung der Meßgase wurde möglichst hoher Reinheitsgrad erstrebt. Verwendet wurden Mercks reinste Chemikalien. Alle Apparate konnten leergepumpt, die Waschflüssigkeiten der Absorptionsgefäße ohne Öffnung der Leitungen erneuert werden.

Vergleichsgas war staubfreie (Glaswollestaubfilter), CO<sub>2</sub>-freie (Batterie kleiner Waschflaschen mit 50 % -KOH) und trockene (Waschflaschen mit konzentrierter H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> und Rohr mit fester KOH) Luft aus dem Freien.

CO (durch Zutropfen reinster HCOOH zu auf 75° erhitzter konzentrierter H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>, Manometer am Entwicklungskolben) ging durch Spiralwaschflaschen mit konzentrierter H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> und ein langes Glasrohr mit fester KOH in ein Hg-Spargasometer mit ins Freie führendem Überdruckventil.

Darstellung von CO<sub>2</sub> durch Zutropfenlassen von konzentrierter H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> zur Lösung von NaHCO<sub>3</sub> und Trocknung mit konzentrierter H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>.

H<sub>2</sub> und O<sub>2</sub>, durch Elektrolyse 32%iger KOH an Ni-Elektroden gewonnen, gingen durch Glaswolle in einen Palla-

diumasbestofen von 300°, wurden durch konzentrierten  $\text{H}_2\text{SO}_4$  und festes KOH getrocknet und strömten in  $\text{H}_2\text{SO}_4$ -Gasbehälter; waren sie voll, so unterbrach die hochgedrückte Elektrolysenflüssigkeit den Strom.

Ferner wurden einige Flaschengase ohne besondere Reinigung verwendet:

Methan . . . .	reinst.
Argon . . . . .	97 % A, 0,1 % $\text{O}_2$ , Rest $\text{N}_2$ .
Methan R . . .	91,59 % $\text{CH}_4$ , 3,66 % $\text{N}_2$ , 0,28 % $\text{O}_2$ , 1,51 % $\text{CO}$ , 1,38 % $\text{H}_2$ , 1,58 % $\text{C}_m\text{H}_n$ .
Propan . . . . .	nach Dampfdruckmessungen einheitlich und völlig rein.

## 2. Glasapparatur

Die Gasometer waren durch Glasleitungen mit der Meßapparatur verblasen. Diese enthielt keine Hahnfett-gedichteten Stellen. Sie bestand aus; barometrischem Hg-Verschuß, Manometer, Schutzgefäß gegen eindringendes Hg, und vor den Blockapparaten noch ein mit Ag- und Au-Folie gefülltes Hg-Dampfabsorptionsgefäß. Dieses wurde während der Messungen, wo größere Gasmengen durchströmten, noch besonders gekühlt, wenn aus verschiedenen Untersuchungen — Kleine (7), Perucca (8), Senftleben (9), Dobretsberger (10) — auch hervorzugehen scheint, daß Hg-Dämpfe auf den Gleichstromwiderstand von Pt-Drähten unter den vorliegenden Bedingungen keinen Einfluß haben. Außerdem war noch ein Hg-gedichteter Schliff vorhanden; gewöhnlich durch Schliffkappe geschlossen, erleichterte er glasbläserische Arbeiten und ermöglichte durch Anschluß von Gefäßen mit passendem Gegenschliff fraktionierte Destillation der Meßgase und Evakuieren mit Holzkohle und flüssigem Stickstoff für die Strahlungsmessung. Als Pumpe wurde eine dreistufige Stahl-Diffusionspumpe (Leybold, Köln) verwendet.

## 3. Thermostaten

Gemessen wurde meist bei 0° C, als der Temperatur, die sich am besten und längsten konstant halten und immer wieder reproduzieren läßt. Die Blockapparate hingen hierzu in einem großen Glas-Leerwandgefäß, das seinerseits in der Mitte eines geräumigen Metall-Leerwandgefäßes (Sprengluftgesellschaft, Berlin) befestigt war. Beide waren mit feingemahlenem, auf Reinheit geprüftem und mit destilliertem Wasser angemachtem Kunsteis gefüllt und äußerlich thermisch gut isoliert. Ein Rührwerk ließ den Inhalt des Glas-Leerwandgefäßes durchrühren,

doch bewährte sich das Einfüllen eines festeren Eis-Wassergemisches besser.

Zur Bestimmung des Temperaturkoeffizienten der Heizdrahtwiderstände wurde ein in einem großen Akkumulatoren-glas stehendes Glas-Leerwandgefäß mit Toluol-Kohlensäure-schnee gefüllt. Lichtstreifen ließen ein Pentanthermometer ablesen; außerdem wurde die Badtemperatur noch aus dem Barometerstand mit der Formel für die Sublimationstemperatur der  $\text{CO}_2$  berechnet:

$$t = -78,5 + 0,01595(p - 760) - 0,000011(p - 760)^2.$$

Die Übereinstimmung war bei gutem Durchrühren genügend.

### III. Messungen mit den neuen Apparaten

#### A. Widerstandsmessungen

##### 1. Alterung der Drähte

Die Heizdrähte, physikalisch-reines Pt (Heraeus), wurden absichtlich nicht durch Ausglühen künstlich gealtert, da bei den verwendeten Meßtemperaturen keine, das Pt verändernde, natürliche Alterung zu befürchten war, wohl aber beim Glühen eine Streckung des Drahtes durch die Spannfedern (11). Vgl. auch (12) und Abschn. C, 2.

##### 2. Meßverfahren

Zur Widerstandsbestimmung wurde am Vergleichswiderstand  $w_2$  etwas größer gewählt als der zu messenden Widerstand und die Brücke mittels Siemensgalvanometer und einem größeren, an  $w_1$  gestöpselten Betrag roh abgeglichen. Nach Umschaltung auf das Spiegelgalvanometer und Feineinstellung erfolgte die endgültige Messung der Widerstände durch lineare Interpolation zwischen den bei Änderung von  $w_1$  um 0,1 Ohm sich ergebenden Galvanometerausschlägen, wobei der gesuchte Widerstand im Bereich dieser Änderung lag.

Zur Ausschaltung des Einflusses der zahlreichen Lötstellen und Quecksilberkontakte wurde mit beiden Stromrichtungen gemessen.

##### 3. Korrektur der Galvanometerausschläge auf Kreisskala und

##### 4. Proportionalität zwischen Stöpselung am Vergleichswiderstand und Galvanometerausschlag

Sie liegen bei Ausschlägen bis zu  $\pm 200$  Skt. (bei Widerstandsmessungen nie überschritten) ganz in den Fehlern und

bei größeren Ausschlägen (manchmal bei Wärmeleitungs-messungen) innerhalb ihrer Reproduzierbarkeit (1—2 Skt.), können also vernachlässigt werden.

#### 5. Stromstärke zu den Widerstandsmessungen

Es wurde für beide Heizdrahtdicken die Stromstärke bestimmt, die bei größtmöglichen Galvanometeraussschlägen die Heizdrähte noch nicht meßbar erwärmt. Man findet, daß bei sehr kleinen Stromstärken die gefundenen Drahtwiderstände um einen Mittelwert schwanken. Bei zunehmender Stromstärke werden infolge der Erhöhung der Galvanometerempfindlichkeit gegen Brückenungleichheit die Abweichungen immer kleiner. Dieses Gebiet, d. h. der zugehörige Vorschaltwiderstand, wurde für die beiden Drahtdicken bei  $\text{CO}_2$ -Füllung experimentell festgelegt. Erhöht man die Stromstärke weiterhin, so zeigt das Ansteigen der Widerstandswerte die immer merklichere Erwärmung der Heizdrähte an.

Um die Reproduzierbarkeit der bei diesen beiden Vorschaltwiderständen gemessenen Widerstandswerte und zugleich ganz allgemein die einer einzelnen Widerstandsmessung zu kennzeichnen, sind den so gefunden Stromstärke-unabhängigen Werten (Spalte 1) in Tab. 2 aus vier weiteren Messungen berechnete Mittelwerte (Spalte 2) gegenübergestellt und zur Kontrolle die Widerstandswerte der kalten Heizdrähte beigelegt, die man aus den bei bereits erwärmten Drähten gemessenen Widerständen nach der in der Platinthermometrie vielfach benützten Regel erhält, daß die Widerstandserhöhung unter sonst gleichen Umständen proportional dem Quadrat der Stromstärke angenommen werden kann (Spalte 3).

Tabelle 2

App. Nr.	Draht- dicke in mm	Bei Vorschalt- widerstand	1	2	3	4
			Einzel- messung	Mittel aus 4 Messungen	Extrapol. Wert	Länge des Drahtes von 1 $\Omega$ in cm
II	0,05	1500	4,38648	4,38642	4,38640	1,980
III	0,04	2000	6,46765	6,46761	6,46745	1,235

Die Tab. 2 zeigt die befriedigende Übereinstimmung aller Werte, wenn auch die durch Extrapolation gewonnenen Werte ein wenig kleiner zu sein scheinen, als die direkt gemessenen. Ihre vielleicht etwas größere Genauigkeit geht jedoch durch

Änderungen der Blocktemperatur während der langen, zu ihrer Messung erforderlichen Zeit wieder verloren.

Der eingeschlagene Weg der direkten Messung genügt also, zumal bei den Blockapparaten größere Erhitzungsgrade benützt werden konnten, was auch geschah.

#### 6. Leitungskorrekturen

Die so erhaltenen rohen Widerstandswerte müssen noch auf Brückenleitungswiderstände korrigiert werden. Die „Leitungskorrekturen“ wurden durch möglichst genaues Vermessen der in der Brücke enthaltenen Leitungen bestimmt. Die größten und durch Materialverlust beim Zusammenschweißen der Drähte unsichersten Beiträge liefern die Pt-Heizdraht-Zuleitungsdrähte. Doch läßt sich das aus technischen Gründen nicht vermeiden. Die Größe der Korrekturen und ihre Anwendung geht aus Tab. 3 hervor, ihre Genauigkeit aus einem Vergleich der direkt gemessenen  $l$ - und  $k$ -Werte mit den aus den gemessenen  $(l + k)$ - und  $(l - k)$ -Werten berechneten.

#### 7. Drahtwiderstände und Widerstandstemperaturkoeffizienten

In Tab. 3 sind als Beispiel für Apparat III die Widerstände der einzelnen Drähte und Drahtkombinationen berechnet und ihre Reproduzierbarkeit, Definiertheit und zeitliche Konstanz gezeigt, ebenso sind ihre Temperaturkoeffizienten zwischen 0 und  $-78^{\circ}\text{C}$  mitgeteilt, berechnet nach der Formel:

$$\alpha = \frac{1}{w_0} \cdot \frac{w_0 - w_t}{t}.$$

Vgl. auch Tab. 2, Spalte 4.

Tabelle 3  
Apparat III

Datum	Temp.	Widerstände	$(l - k)$	$(l + k)$	$l$	$k$
3. 7. 30	$0^{\circ}\text{C}$	Messung	6,46559	9,57687	8,04407	1,57653
		Leitungskorrektion	0,00150	0,16748	0,10486	0,10567
		Korrigierter Wert	6,46709	9,40939	7,93921	1,47086
		Aus $l + k$ u. $l - k$ ber.	—	—	7,93824	1,47115
		Differenz	—	—	0,12 $\frac{1}{100}$	0,20 $\frac{1}{100}$
10. 6. 30	0	Korrigierte Werte	6,46693	9,40981	7,93949	1,47098
11. 7. 30	0	„	6,46703	9,40889	7,93860	1,47056
20. 7. 30	$-78,7$	Korrigierte Werte	4,44815	6,48326	5,46635	1,01820
		Temp.-Koeffizient	0,00397	0,00395	0,00396	0,00391



**B. Wärmeleitungsmessungen****1. Gang der Messung**

Bei geringen Überhitzungen und bei schlecht leitenden Gasen erfolgte die Widerstandsmessung nach kurzer Erwärmung der Drähte im neu in den Apparat gefüllten Gas um etwa  $10^\circ$  über die später verwendete Meßtemperatur in der bereits mitgeteilten Weise (S. 353). Bei gut leitenden Gasen und starken Überhitzungen konnte zur Vereinfachung der Rechnung folgendermaßen verfahren werden: Nach der Roheinstellung der Brücke wurden Vorschalt- und Vergleichswiderstand variiert, bis bei einer bestimmten Einstellung das Spiegelgalvanometer gerade im wahren Nullpunkt stand, seine Stellung also bei Stromumkehr nicht änderte. Wegen der bei dem starken Heizstrom hohen Galvanometerempfindlichkeit gegen Brückenungleichheit konnte dann die Ablesung bei verändertem Vergleichswiderstand und die nachfolgende rechnerische Interpolation unterbleiben. Dieses Meßverfahren eignete sich wegen seiner Schnelligkeit vor allem bei Blockerwärmung. Das Voltmeter ergab vor und nach der Widerstandsmessung stets vollkommen gleiche Ablesung.

**2. Gang der Berechnung der Wärmeleitzahlen**

Entsprechend der Formel zur Berechnung der Wärmeleitfähigkeit aus dem Wärmeaustausch durch Leitung und Strahlung zwischen zwei coaxialen Zylinderflächen

$$\lambda_{\text{abs.}} = \frac{Q - S}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot (t_1 - t_2)} \left( \ln \frac{R}{r} \right),$$

$Q = 0,24 i^2 w$  Wattverlust bei stationärer Wärmeströmung,

$L$  Länge des Heizdrahtes,

$t_1$  Heizdrahttemperatur

$t_2$  Blocktemperatur

$R$  Kapillarenradius,

$r$  Heizdrahtradius,

$S$  Wattverlust durch Strahlung

$$(t_1 - t_2) \approx \Delta w,$$

wurden als Wärmeleitungsrelativwerte  $\lambda_{r,g}$  die Größen

$$(W = (l + k) + (l - k) + \text{Leitungswiderstand})$$

$$\lambda_{r,g} = \frac{i_{\text{Meßdraht}} \cdot e_{\text{Meßstück}}}{\Delta w} = \frac{E^2 \cdot w_{\text{heiß}}}{W^2 \cdot \Delta w}$$

berechnet; und zwar nacheinander für eine Reihe verschieden großer Überhitzungen. Da in die Berechnung die Widerstandsdifferenz eingeht, sind die für geringe Überhitzungen berechneten Wärmeleitungswerte unsicher, aber regelmäßig zu groß. Mit größer werdendem  $\Delta w$  fallen sie aber rasch, um nach dem Durchlaufen eines kurzen Übergangsgebietes scheinbarer Unab-

Tabelle 4  
(Apparat I. Luft 747,3 mm bei 0° C)

$\frac{\Delta w}{(l - k)_k}$	$\lambda_{r,g}$	$\lambda_{r,e}$
0,0	—	0,2965
0,00824	0,30272	—
0,01722	0,29943	—
0,02822	0,29963	—
0,04433	0,30120	—
0,05291	0,30227	—
0,06696	0,30371	—
0,08155	0,30543	—
0,09531	0,30688	—
0,10585	0,30794	—
0,12912	0,31065	—

hängigkeit von  $\Delta w$  mit  $\pm 1$  p. T. Abweichung proportional mit dem Überhitzungsgrad anzusteigen (Tab. 4). Die gemessenen Einzelwerte  $\lambda_{r,g}$  wurden dann auf  $\Delta w = 0$  graphisch durch gerade Linie extrapoliert. Die so erhaltenen Werte  $\lambda_{r,e}$  wurden auf Strahlung korrigiert und liefern durch den nachfolgend für Luft in derselben Weise bestimmten Wert dividiert, die Relativwerte bezogen auf Luft = 1, die bei Kenntnis der absoluten Wärmeleitzahl der Luft leicht in Absolutwerte umgerechnet werden können.

Die folgenden Abschnitte seien der Kritik dieser Meß- und Berechnungsweise gewidmet.

### 3. Genauigkeit der gemessenen Einzelwerte

Zur Beurteilung der Reproduzierbarkeit der Einzelmessungen sind die Tabellen 5—7 mitgeteilt.

Tabelle 5  
Bei konstanter Luftfüllung und Appareteinstellung  
in Abständen von 1 Std. wiederholte Messungen von  $\lambda_{r,g}$

Zeit	$\lambda_{r,g}$	Differenz gegen Mittelwert in $\frac{1}{100}$
22.00 <sup>h</sup>	0,18874	— 0,21
22.30	0,18885	+ 0,37
23.30	0,18872	— 0,31
00.30	0,18882	+ 0,21
1.30	0,18876	— 0,08
2.30	0,18878	+ 0,02

Mittelwert: 0,18878

Tabelle 6

Messung von  $\lambda_{r,g}$  bei konstanter Apparateneinstellung  
und stets frischer Gasfüllung

$\lambda_{r,g}$	$p$ in mm	Differenz gegen Mittelwert in ‰
0,19338	500,5	- 0,34
0,19346	500,8	+ 0,09
0,19341	503,4	- 0,17
0,19353	501,1	+ 0,42

Mittelwert: 0,19345

Tabelle 7

Messung von  $\lambda_{r,g}$  von  $\text{CO}_2$  (497,1 mm) bei möglichst gleicher Überhitzung  
der Heizdrähte, aber bei Änderung der aus zwei gleichen, gestöpselten  
Widerständen bestehenden Brückenhälfte

$a : b$	$\lambda_{r,g}$	Differenz gegen Mittelwert in ‰
2000 : 2000	0,11863	+ 2,8
1000 : 1000	0,11868	+ 3,2
500 : 500	- 0,11823	- 0,5
200 : 200	- 0,11841	+ 0,9
100 : 100	- 0,11828	- 0,1
50 : 50	- 0,11825	- 0,3
20 : 20	- 0,11826	- 0,3
10 : 10	- 0,11835	+ 0,4
5 : 5	0,11810	- 1,6
2 : 2	0,11683	- 12,4

Mittelwert: - 0,11830

Man findet in Tab. 7 die alte Regel bestätigt, daß Brücken bei Gleichheit aller Zweige am genauesten arbeiten. Bei den Messungen wurde für  $a:b$  stets 20:20  $\Omega$  verwendet.

Der Einfluß aller übrigen, noch möglichen Änderungen am elektrischen Teil der Anlage auf die Wärmeleitungseinzelnwerte ist in dem Einfluß der Änderung der Heizstromstärke inbegriffen und damit in der Abweichung der Einzelwerte von der oben beschriebenen Extrapolationsgeraden der  $\lambda_{r,g}$ -Werte auf  $\Delta w = 0$  enthalten (Tab. 4).

Überblickt man die Tabellen 4—7, so erscheint der Schluß berechtigt, daß der elektrische Teil der Anordnung eine Reproduzierbarkeit der Einzelwerte von  $\pm 1$  p. T. mit Sicherheit gewährleistet. Darin ist die Undefiniertheit der Instrumente und der Zuleitungen enthalten, sowie die Undefiniertheit des Erhitzungsvorganges der Drähte, nicht aber Undefiniertheiten,

die vom Meßgas herrühren. Dieses Ergebnis muß als befriedigend bezeichnet werden, da es hauptsächlich durch die Ablesegenauigkeit des Voltmeters bedingt wird, sich also kaum verbessern lassen wird.

Der Einfluß des Meßgases auf die Reproduzierbarkeit und die Absolutgenauigkeit wird weiter unten gesondert behandelt.

Die graphische Extrapolation auf  $\Delta w = 0$  gleicht die Streuung der Einzelwerte weitgehend aus, doch geht durch die Extrapolation die so gewonnene, größere Sicherheit wieder verloren.

#### 4. Kritik und Korrektion der Kurve $\lambda_{r,g} - \Delta w$

a) Der durch das Rechnen mit  $\left(\frac{l+k}{l-k}\right)_k$  bedingte Fehler

Wie S. 347 bereits gezeigt wurde, bedingt das Berechnen der Werte mit  $(l+k)/(l-k)_k$  statt mit  $(l+k)/(l-k)_k$  ein Kleinerwerden der Wärmeleitungswerte mit steigender Draht-überhitzung, kann also den gefundenen Anstieg nicht erklären.

#### b) Einfluß der Strahlung

##### Messung des Strahlungsverlustes

Mit Apparat I und III wurde genau wie bei Gasfüllung auch im Hochvakuum der Wattverlust des Meßstückes gemessen (Tab. 8).

Tabelle 8

##### Gemessene Strahlungsverluste

##### Apparat I. Temperaturbad 0° C

Draht-Temp. ° C	$\frac{\Delta w}{(l-k)_k}$	$\lambda_e$	Ges. Watt
4,81	0,0187	0,002007	0,000155
7,91	0,0307	0,002002	0,000254
9,91	0,0384	0,002004	0,000318
12,39	0,0481	0,002002	0,000397
13,90	0,0539	0,001981	0,000441
15,24	0,0591	0,001960	0,000478
17,13	0,0665	0,001956	0,000537

##### Apparat III. Temperaturbad 0° C

8,90	0,0353	0,000986	0,000225
14,98	0,0594	0,000995	0,000382
19,74	0,0784	0,000995	0,000504
22,17	0,0880	0,000977	0,000556
26,93	0,107	0,000974	0,000673
31,51	0,125	0,000989	0,000800
36,48	0,1445	0,000978	0,000916

## Berechnung des Strahlungsverlustes

Zur Berechnung dieser Korrektionsgröße verwandten wir nicht die Aschkinnasssche Formel (13), die zudem nur für glatte, blanke Oberflächen bestätigt ist, sondern das Stefan-Boltzmannsche  $T^4$ -Gesetz; seine Strahlungskonstante müßte dann proportional  $T$  sein, eine Abhängigkeit, die im vorliegenden Temperaturbereich vernachlässigt werden darf. (14)

Unter der berechtigten Voraussetzung diffuser Reflexion und grauer Strahlung berechnet sich nach Nusselt (15) die vom Platindraht, dessen Querschnitt keine einspringenden Ecken haben darf, zur Kapillareninnenfläche gestrahlte Energie nach der Formel:

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{F_1}{F_2} \left( \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right)} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot F_1 \frac{\text{kcal}}{h}$$

$C_1$  Strahlungskonstante

$F_1$  Oberfläche des Platindrahtes

$T_1$  absolute Temperatur des Platindrahtes

$C_2$  Strahlungskonstante des Platindrahtes

$F_2, T_2, C_2$  desgl. für die Kapillarwand

$a_1$  Absorptionsvermögen des Platins = 0,20 (Kohlrausch)

$a_2$  Absorptionsvermögen des Kupfers = 0,05 (14).

Unter Verwendung des Kirchhoffschen Gesetzes [vgl. Merkel (16)]

$$C_1 = a_1 \cdot C, \quad C_2 = a_2 \cdot C,$$

und Übergang zu Watt nimmt obiger Ausdruck folgende Form an:

$$Q = \frac{5,76 \cdot 10^{-4}}{\frac{1}{a_1} + \frac{F_1}{F_2} \left( \frac{1}{a_2} - 1 \right)} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot F_1 \text{ Watt.}$$

Die hiermit für die App. I u. III berechneten Strahlungsverluste bei verschiedenen Drahtüberhitzungen und die sich daraus ergebenden „Wärmeleitfähigkeiten“ des Vakuums sind in Tab. 9 mitgeteilt. Sie enthält auch die Gesamtwattverluste unter der Voraussetzung schwarzer Strahlung.

Man ersieht aus den Tabellen 8 und 9, daß die experimentell gefundenen Strahlungswerte ungefähr 50 % der bei absolut schwarzen Oberflächen gestrahlten Energiebeträge sind, daß aber die mit sachgemäß angenommenen Absorptionsvermögen berechneten Werte nicht mehr als 20 % der schwarzen Strahlung ausmachen können. Die gemessenen Werte müssen also infolge Wärmeableitung im Heizdraht wegen ungenügender Kompensation oder infolge nicht genügenden Vakuums zu groß sein. Auf ersteres wird auch in der Literatur öfters hin-

Tabelle 9

Für graue und schwarze Strahlung berechnete Wattverluste

Draht-Temp. °C	$\frac{\Delta w}{(l - k)_k}$	Ges. Watt	$\lambda_v = \frac{\text{Ges. Watt}}{\Delta w}$	Ges. Watt
Apparat I:		als grauer Körper		als schwarzer Körper
5	0,0194	0,000052	0,000650	0,000310
10	0,0388	0,000107	0,000668	0,000636
15	0,0582	0,000165	0,000687	0,000981
20	0,0776	0,000226	0,000706	0,001344
25	0,0970	0,000290	0,000725	0,001725
Apparat III:				
5	0,0199	0,000042	0,000326	0,000242
10	0,0397	0,000086	0,000337	0,000498
15	0,0596	0,000133	0,000346	0,000767
20	0,0794	0,000182	0,000355	0,001051
25	0,0993	0,000234	0,000365	0,001350

gewiesen, für letzteres spricht, daß es bei den Messungen trotz stundenlangen Pumpens, Holzkohle und Entgasung durch elektrodenlose Entladung nach der Schirmannschen Methode (17) nicht gelang, am Galvanometer feste Ausschläge zu bekommen (wegen der zahlreichen Gasquellen in der weitläufigen Anlage und der Unmöglichkeit, durch Erhitzen zu entgasen). Daher wurden bei späteren Rechnungen statt der gemessenen die berechneten Strahlungswerte verwendet.

Der Strahlungsverlust des Meßstücks beträgt bei 0° C sogar bei der schlechtleitenden CO<sub>2</sub> nur ungefähr 0,3% des Leitungswertes. Ferner steigen die aus den Strahlungsverlusten berechneten  $\lambda_v$ -Werte für die vorliegenden geringen Überhitzungen bei nicht sehr hoher absoluter Temperatur nahezu linear an (bei 10° C um 6%), so daß dieser Anstieg in die Fehlergrenze der Messungen fällt. So wird die  $\lambda_{r,g}/\Delta w$ -Kurve durch Korrektur der Einzelwerte auf Strahlung nur um einen kleinen Betrag parallel zu sich selbst verschoben, so daß der Strahlungseinfluß die Neigung dieser Kurve praktisch nicht beeinflusst, also auch nicht verursacht.

Die Korrektur der Wärmeleitrelativwerte auf Strahlung erfolgt am einfachsten durch Verkleinerung der Rohwerte  $\lambda_{r,e}$  um den auf  $\Delta w = 0$  extrapolierten „Wärmeleitwert“ des Vakuums. Diese Korrekturen betragen nach Tab. 9 für 0° C:

App. I: 0,00063

App. III: 0,00032

Diese Art der Korrektur auf Strahlung wird bei Gasen, die die Wärmestrahlung merklich absorbieren, unzulässig, jedoch merklich nur bei hohen Temperaturen und Gasen wie etwa  $\text{CO}_2$  (18, 19) und  $\text{C}_2\text{H}_4$  (20, 21).

c) *Konvektion*<sup>1)</sup>

Eine Erklärung für den Anstieg der Wärmeleitwerte mit  $\Delta w$  gäbe ferner die Konvektion, die sich bei steigender Überhitzung mehr und mehr bemerkbar machen müßte. Die Konvektion ist der peinlichste Begleitumstand bei der Wärmeleitungsmessung und läßt sich nachgewiesenerweise durch das Messen „bei Unterdruck“ unter Zitieren von Kundt und Warburg (22) nur einschränken, nicht beseitigen.

Der Techniker beschäftigt sich wenig mit freier, meist mit erzwungener Konvektion, beim Zylinder in beiden Fällen zudem fast ausschließlich mit dem Fall der senkrecht zur Achse gerichteten Gasströmung. So fand sich in der technischen Literatur über freie Konvektion an Zylindern mit parallel zur Achse gerichteter Strömung nur folgende Notiz bei M. ten Bosch (23):

„Ähnliche Kennfunktionen wie die für das horizontale, gerade Rohr gefundenen werden auch bei vertikalen und geneigten Rohren vorhanden sein. Über vertikale und horizontale Platten liegen einige Versuche von Nusselt und K. Hencky vor, welche aber nicht ausreichen, die Kennfunktion allgemein zu bestimmen, denn auch die Größen der Flächen werden dabei wohl eine Rolle spielen“.

Auch haben wir in der Literatur über Konvektion in Euckenschen Apparaten oder ähnlich dimensionierten Kapillaren nichts finden können. Die Arbeiten über Konvektion an frei ausgespannten, geheizten Drähten sind meist mit horizontaler Anordnung ausgeführt (24, 25, 26).

Mit der Konvektion an vertikalen, in weiteren Röhren ausgespannten Drähten haben sich Wassiljew, White und S. Weber beschäftigt.

Frl. Wassiljew (27) gelangte 1905 zu dem Ergebnis, daß die Konvektion proportional dem Quadrat der Temperaturdifferenz zwischen Draht und Wand wächst, und daß die Konvektion bei vertikaler Lage des Drahtes kleiner ist als bei horizontaler. — Dieser Befund könnte jedoch der vorliegenden, geradlinigen Kurve nicht entnommen werden, so daß demnach in den engen Kapillaren keine Konvektion stattfindet.

White (28) 1910 stellte mit Hilfe von Rauch fest, daß bei einer dünnen, vertikalen, von verschieden warmen Flächen begrenzten Luftschicht die Strömung an der warmen Fläche aufsteigt und an der kalten

1) „Konvektion“ ist in der Wärmeleitungsliteratur zum Fachausdruck für Wärmeaustausch durch Gasströmungen geworden. Die Ausdrücke Wärmeströmung und Wärmestrom beziehen sich nicht auf ein bewegtes Medium.



absinkt, ohne daß Wirbel auftreten; er fand ferner, daß die Temperaturverteilung dadurch nur dort geändert wird, wo die Strömungen umbiegen — beim vorliegenden Meßstück also nirgends. Die Geschwindigkeit der Stromlinien und damit der Einfluß der Konvektion ändert sich mit der dritten Potenz des Abstandes der Oberflächen. Die Konvektion nimmt mit der mittleren Temperatur der beiden Oberflächen durch das Anwachsen der inneren Reibung und die Zunahme der Gasverdichtung ab.

Weber (11) hat 1917 sehr exakte Untersuchungen über Konvektion an horizontalen und vertikalen Schleiermacherapparaten mit 2,3 cm weiter Glashülle angestellt. Bei vertikalem Apparat traten bei Messung der Wärmeleitfähigkeit selbst bei Drahtübertemperaturen bis zu  $30^\circ$  (mit Ausnahme von  $\text{CO}_2$  und  $\text{N}_2\text{O}$ ) keine turbulenten Strömungen auf. Dagegen fand Weber bei der Messung der Druckabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit einen linearen Anstieg der Wärmeleitfähigkeit mit dem Druck, den er nicht durch Temperatursprung erklären konnte. Die Deutung durch vertikale Strömungen konnte er jedoch durch Messen des Wattverlustes an verschiedenen Bezirken eines mit mehreren Sonden versehenen Drahtes ausschließen; er erklärt diese Abhängigkeit durch horizontale Strömungen. Eine Abhängigkeit derselben von der Drahtübertemperatur konnte nicht mit voller Sicherheit festgestellt werden.

Nun muß ausdrücklich betont werden, daß Ergebnisse über Konvektion nur mit allergrößter Vorsicht vom Versuchsgesetz auf anders dimensionierte Anordnungen übertragen werden dürfen. Sieht man jedoch für den vorliegenden Fall eine solche Übertragung als statthaft an, so würden die Untersuchungen von Wassiljewa und White die Konvektionsfreiheit des Euckenschen Apparates wahrscheinlich machen. Die Untersuchungen Webers würden das Auftreten turbulenter Strömungen und den Einfluß vertikaler Strömungen ausschließen (ersteres ist auch für  $\text{CO}_2$  experimentell bestätigt), würden jedoch die Möglichkeit horizontaler Strömungen offen lassen.

Unter teilweiser Vorwegnahme der Ergebnisse späterer Abschnitte kann nun gesagt werden, daß turbulente und vertikale Strömungen im Euckenschen Apparat als bedeutungslos angesehen werden dürfen, denn der zu  $\Delta w$  proportionale Anstieg der Wärmeleitwerte schließt alle zu  $(\Delta w)^2 + n$  ( $n \geq 1$ ) proportionale Konvektionsarten aus; eine zu  $(\Delta w)^1$  proportionale, turbulente oder vertikale Konvektion, die sich als zusätzliche Leitfähigkeit äußern und nur die Lage der Geraden, nicht aber ihre Neigung beeinflussen würde, ist durch Wassiljewa, White und Weber unwahrscheinlich gemacht und eine  $(\Delta w)^2$  proportionale turbulente oder vertikale Konvektion, die die Neigung, aber nicht die Geradlinigkeit der Kurve beeinflussen würde, kommt wegen der anderweitig möglichen Deutbarkeit der Neigung kaum in Betracht (vgl. folgenden Abschnitt d). Dagegen wären zu  $(\Delta w)^1$  oder  $(\Delta w)^2$  proportionale, horizontale

Strömungen möglich, doch fand Weber keine so sehr merkwürdige Abhängigkeit derselben vom Überhitzungsgrad und fand die horizontalen Strömungen zudem nicht bei allen Gasen wirksam, während der hier in Frage stehende Kurvenverlauf bei allen untersuchten Gasen festgestellt wurde. Außerdem ist auch hier zu sagen, daß beide Kurven,  $\lambda/\Delta w$  und  $\lambda/p$ , auf andere Weise deutbar sind; vgl. folgende Abschnitte d und e.

Es kann also mit Sicherheit gesagt werden, daß der Euckensche Apparat konvektionsfreier ist als der Webersche und als alle andern Apparate, und kann mit Wahrscheinlichkeit gesagt werden, daß die vorhandene Konvektion unmeßbar klein ist.

Was für die Allgemeingültigkeit experimenteller Befunde über Konvektion gilt, gilt naturgemäß auch für die aus den experimentellen Erfahrungen hergeleiteten Formeln; auch sie sind, da apparativ bedingt, kaum übertragbar. Experimente und umfassende Literaturübersicht geben Ray und Pramanik (24, 25), sowie Weber (29), S. 489, Anmerkung und Seeliger (26).

#### d) Temperaturkoeffizient $\beta$ der Wärmeleitzahl

Der Anstieg der gemessenen Wärmeleiteinzelwerte mit der Drahtüberhitzung (vgl. Tab. 4) kann aber auch durch die mit steigender Temperatur größer werdende Wärmeleitfähigkeit der Gase bedingt sein. Gemessene Einzelwerte beziehen sich demnach auf eine mittlere Temperatur, und zwar nach Schleiermacher (30) auf  $(t_1 + t_2)/2$ . Dies ist zwar nur näherungsweise richtig (vgl. unten), doch genügt der Grad der Näherung für die hier vorkommenden, verhältnismäßig kleinen Übertemperaturen.

Aus den für die verschiedenen Gase gefundenen Kurven müssen sich also richtige Temperaturkoeffizienten ergeben; werden sie zu groß, so besteht Verdacht auf Konvektion.

Die so erhaltenen Temperaturkoeffizienten sind wegen der sehr empfindlichen Berechnung durch Differenzbildung unsicher. Einige Werte seien in Tab. 10 mitgeteilt.

Tabelle 10

Aus den  $\lambda_{r,g}/\Delta w$ -Kurven berechnete Wärmeleittemperaturkoeffizienten  $\beta$   
 $\lambda_t = \lambda_0 (1 + \beta t)$

Gas	Apparat III	Apparat I
Kohlensäure . . . . .	0,00528	0,00520
Luft . . . . .	0,00227	0,00273
Kohlenoxyd . . . . .	0,00273	0,00304
Methan, rein . . . . .	0,00401	0,00451
Argon . . . . .	0,00324	0,00323
Propan . . . . .	0,00682	0,00662

Zum Vergleich sind in Tab. 11 einige frühere Werte mitgeteilt. Vgl. auch (1) S. 281.

Tabelle 11

Von andern Forschern und nach andern Methoden gemessene  $\lambda$ -Temperaturkoeffizienten  $\beta$

	CO <sub>2</sub>	Luft	CO	CH <sub>4</sub>	A
Winkelmann . . . .	0,00401	0,00190		0,00610	
Graetz . . . . .	0,00223	0,00185			
Schleiermacher . .	0,00548	0,00281			
Eichhorn . . . . .	0,00367	0,00199			
Schwarze . . . . .		0,00253			0,00260
Eucken . . . . .	0,00495	0,00271		0,00380	0,00311
Weber . . . . .		0,00365		0,00476	
Krey . . . . .			0,00262		
Ziegler . . . . .				0,00655	
Schneider . . . . .		0,00395			
Mittelwerte:	0,00407	0,00267	0,00262	0,00530	0,00285

Berechnet man daraus Mittelwerte, so werden sie meist kleiner als die in Tab. 10 mitgeteilten Temperaturkoeffizienten. Der Unterschied ist jedoch bei der Unsicherheit der in den beiden Tabellen mitgeteilten Werte ebenfalls unsicher, und zudem noch zum Teil dadurch erklärlich, daß die zwischen 0 und 10° gefundenen (differentiellen) Werte der Tab. 10 mit den meist zwischen 0 und 100° gemessenen (integralen) Temperaturkoeffizienten der Tab. 11 verglichen werden (11, 31). Die letzteren sind aber mit Gewißheit kleiner als die erstgenannten.

Es kann somit gesagt werden, daß der gefundene Anstieg von  $\lambda_{r,g}$  mit  $\Delta w$  sich durch die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitzahl genügend erklären läßt.

Dies ist zugleich ein Beweis für die Konvektionsfreiheit des Apparates und ein Weg, differentielle Temperaturkoeffizienten zu messen.

#### e) Ungenügende Kompensation der Drahtenden

Es kann auch die Frage aufgeworfen werden, ob die Kompensation der Endstücke von  $l$  durch den Draht  $k$  genügt. Den rechnerischen Beweis hierfür haben die Herren Weber (11, 29) und Gregory und Archer (5) angegeben. Wertvoll wäre noch der experimentelle Beweis, denn er umfaßt auch den Nachweis der Kompensation der nicht genau vertikalen Drahtausspannung und der Undefiniertheit der Querschnitte von Draht und Kapillare. Am größten ist die Gefahr ungenügender Kompensation bei den stärkeren Heizdrähten der Apparate I und II. Es

wurden deshalb mit ihnen die auf  $\Delta w = 0$  extrapolierten relativen Wärmeleitwerte mit den Drähten und Drahtkombinationen  $l$ ,  $k$ ,  $l + k$ ,  $l - k$  gemessen, auf den mit  $l - k$  gefundenen Wert als Einheit bezogen und der zugehörigen, auf ein einzelnes Heizdrahtendstück entfallenden Heizdrahtlänge gegenübergestellt, Tab. 12.

Tabelle 12

Apparat	Draht	Drahtlänge cm	Enden	Drahtlänge pro 1 Ende cm	$\lambda_{r,e}$	$\lambda_{r,e}$ rel.
I	$l - k$	8,17	0	$\infty$	0,1760	1,000
	$l$	9,72	2	4,86	0,1810	1,028
	$l + k$	11,27	4	2,82	0,1840	1,045
	$k$	1,55	2	0,77	0,2148	1,220
II	$l - k$	8,68	0	$\infty$	0,1987	1,000
	$l$	10,22	2	5,11	0,2008	1,010
	$l + k$	11,80	4	2,95	0,2026	1,020
	$k$	1,55	2	0,77	0,2193	1,103

Die mit  $l - k$  gemessenen Werte erscheinen hierbei durchaus als Grenzwerte für endenfreien Meßdraht.

#### f) Sonstige Möglichkeiten

Die Änderung des Meßdrahtdurchmessers mit der Temperatur kann als vernachlässigbar klein angesehen werden, und für eine Abhängigkeit der Wärmeleitzahl von der Wärmestromstärke sprechen bis jetzt keine Beobachtungen.

#### 5. Abhängigkeit der Wärmeleitzahl vom Druck. Temperatursprung

Vorversuche zeigten, daß man bei der Länge der Meßreihen nur bei Ausschaltung apparativer Änderungen (Badtemperatur) durch rasches Arbeiten vergleichbare Werte erhält; außerdem muß die unter dem Gesichtspunkte der Verkleinerung der Meßfehler durch große Drahtüberhitzung bei möglichst kleiner Blockerwärmung gewählte Drahtüberhitzung für jede Meßreihe konstant gehalten werden; das ist mit der Brückenmethode leicht erreichbar und bereits während der Messung kontrollierbar.

Würde man die Gaswärmeleitfähigkeit mit einem Apparat untersuchen, dessen Abmessungen verglichen mit der freien Weglänge der Gasmoleküle stets sehr groß ist, so fände man entsprechend der kinetischen Gastheorie für die Wärmeleitzahl *idealer* Gase vollkommene Druckunabhängigkeit, für *reale* Gase aber bei Drucken bis je nach dem Gas ungefähr 10–100 Atm. lineares, bei höheren Drucken aber beschleunigtes Ansteigen der Wärmeleitfähigkeit.

Die Ausschaltung der Konvektion erfordert nun aber möglichst klein dimensionierte Apparate, so daß bei sehr kleinen Drucken die freie Weglänge der Gasmoleküle ein Vielfaches des Apparatdurchmessers ist. Es finden deshalb dann Stöße mit Energieausgleich zwischen den Gasmolekülen nicht in merklicher Weise statt, sondern nur noch solche an den Wänden.  $\lambda$  wird proportional der Anzahl vorhandener Moleküle, also proportional  $p$ . Mit steigendem Druck verkleinert sich die freie Weglänge, die Stöße im Gas gewinnen an Bedeutung, und der Temperatursprung an den Wänden wird kleiner, so daß ein stetiger Übergang zu der oben theoretisch geforderten Linearität zwischen  $\lambda$  und  $p$  stattfindet. Alle gemessenen Kurvenstücke können noch durch Konvektion beeinflußt sein, mit steigenden Drucken wegen der zunehmenden Wärmekapazität des Gases immer mehr, vor allem aber, wenn turbulente Strömungen auftreten.

Tabelle 13  
Druckabhängigkeit der  $\lambda_{r,g}$

Apparat I 0° C	CO <sub>2</sub> ; $\Delta t = 23,5^\circ$	Apparat III 0° C	CO <sub>2</sub> ; $\Delta t = 16,4^\circ$
$p = 891,2$ mm	$\lambda_{r,g} = 0,188\ 94$	$p = 811,0$ mm	$\lambda_{r,g} = 0,120\ 42$
804,5	0,188 93	666,6	0,120 24
718,1	0,188 85	555,0	0,119 94
636,6	0,188 66	447,9	0,119 78
561,1	0,188 60	335,7	0,119 51
476,2	0,188 35	240,8	0,119 16
398,2	0,188 36	142,4	0,118 35
320,0	0,188 16	85,8	0,117 27
238,1	0,187 88		
183,7	0,187 30		
134,0	0,186 68		

Die Messungen, z. B. Tab. 13, ergaben bis ungefähr 300 mm die durch den Temperatursprung bedingte Kurvenform mit abnehmender Krümmung, die oberhalb 300 mm in ein bis zu den höchsten gemessenen Drucken (1000 mm) linear ansteigendes Kurvenstück übergeht.

Die Gasunidealität bedingt zwar eine Linearität von  $\lambda$  zu  $p$ , jedoch von wesentlich kleinerem Betrage als die vorliegenden  $\lambda$ -Messungen ergaben (Tab. 14). Nach Herrn Enskog (32) geht diese lineare Druckabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit bei realen Gasen der ihrer Reibung etwa parallel, würde also von ähnlicher Größenordnung sein wie die von  $\eta$ .

Diese ist [Literatur bei (33)] nach den Boydschen Messungen zwischen 1 und 190 Atm. für  $H_2$  0,8—1, für  $N_2$  1,8—1,6 und nach Phillips für  $CO_2$  bis etwa 80 Atm. 2,9—3,2  $\%$ /Atm. Die Gasunidealität reicht also voraussichtlich zur Deutung unserer so viel steileren linearen Kurvenstücke nicht aus.

Unter der Annahme, daß der mit  $p$  lineare Anstieg der gemessenen Wärmeleitzahlen oberhalb 300 mm durch Gasunidealität und Konvektion bedingt ist, und daß diese Linearität auch unterhalb 300 mm bis  $p = 0$  bestehen bleibt, jedoch von dem hier einflußreicheren Temperatursprung überlagert wird, bekommt man durch lineare Extrapolation des geraden Stücks der gemessenen  $\lambda/p$ -Kurve bis zum Druck 0 den auf Gasunidealität und Konvektion korrigierten Wärmeleitwert  $\lambda_{v=\infty}$ . Die Ordinatendifferenzen zwischen den Punkten der Extrapolationsgeraden und den Punkten der zur  $p$ -Achse parallelen Geraden  $\lambda = \lambda_{v=\infty}$  für die einzelnen  $p$ -Werte stellen jeweils die Korrekturen dar. Subtrahiert man sie von den bei den betreffenden Drucken gemessenen Wärmeleitzahlen, so erhält man eine neue, nur noch durch den Temperatursprung beeinflusste  $\lambda/p$ -Kurve. Sie verläuft bis ungefähr 300 mm ähnlich der gemessenen, geht dann aber in die Gerade  $\lambda = \lambda_{v=\infty}$  über. Es gelang jedoch nicht, den druckabhängigen Teil dieser Kurve unterhalb 300 mm in der von v. Smoluchowski (34) angegebenen Weise auf Temperatursprung zu korrigieren.

Andererseits gelingt es, wenigstens bis zu einem gewissen Grad, den ganzen gemessenen Kurvenzug  $\lambda/p$  unter der Annahme, er sei lediglich durch Temperatursprung bedingt, rein formal auf Temperatursprung-unabhängige Werte zu korrigieren, jedoch nur unter der Annahme, daß Temperatursprung-unbeeinflusste, druckunabhängige Wärmeleitwerte erst bei Drucken von mehr als 2 Atm. erreicht werden. Dabei nehmen aber die Koeffizienten der v. Smoluchowskischen Formel allzu *abnorme* Werte an, wie auch ein *geradliniges* Ansteigen von  $\lambda$  mit  $p$  dem physikalischen Sinn der Temperatursprungtheorie und ihrer mathematischen Formulierung widerspricht.

Stellt man nun die gemessenen, geradlinigen Kurvenstücke nach der Formel

$$\lambda_p = \lambda_0(1 + k \cdot p) \quad p \text{ in cm Hg}$$

dar, so findet man für  $k$  die in Tab. 14 zusammengestellten Werte. Die starke Abhängigkeit der Koeffizienten  $k$  vom Heizdrahtdurchmesser ist dem Temperatursprung wesensverwandt und steht ganz im Gegensatz zu S. Webers typischen Konvektionskoeffizienten, die für die schwersten Gase die höchsten Werte annehmen.

Tabelle 14

Koeffizienten  $k$  der Beziehung  $\lambda_p = \lambda_0 (1 + kp)$ ,  $p$  in cm Hg gemessen

	Apparat I Kapillare 1 mm $\phi$ Heizdraht 0,05 mm $\phi$	Apparat III Kapillare 1 mm $\phi$ Heizdraht 0,04 mm $\phi$	S. Weber Konvektions- Koeffizienten
Kohlensäure . .	0,000 083	0,000 172	0,000 52
Stickoxydul . .			0,000 41
Methan . . . .			0,000 11
Sauerstoff . . .			0,000 03
Luft . . . . .	0,000 071	0,000 109	0,000 03
Argon . . . . .		0,000 155	0,000 03
Helium . . . . .	0,000 584	0,001 311	0,000 00
Neon . . . . .			0,000 00
Wasserstoff . .		0,000 600	0,000 00

So kann die Druckabhängigkeit der gemessenen Wärmeleitwerte zur Zeit nicht mit Sicherheit gedeutet werden.<sup>1)</sup> Wir hoffen, daß die bereits begonnenen Messungen bei höheren Drucken hierüber Aufschluß geben werden. Vorerst empfiehlt es sich jedoch für die Berechnung von Absolutwerten  $\lambda_{r,g}$ -Werte gleicher Drucke aufeinander zu beziehen. Es wurden die Werte für 500 mm gewählt. Sieht man von He, Ne und H<sub>2</sub> ab, so können dadurch wegen der Ähnlichkeit der Koeffizienten  $k$  und der Temperatursprungkoeffizienten kaum Fehler größer als  $\pm 1\%$  entstehen.

## C. Mitteilung der Meßergebnisse

1. Wärmeleitzahlen für CO<sub>2</sub>, CO, CH<sub>4</sub>, Ar, CH<sub>4</sub>R, Propan

Die möglichst bei  $p = 500$  mm unter verschiedenen Temperaturgefallen gemessenen  $\lambda_{r,g}$ -Werte wurden also auf  $\Delta w = 0$  extrapoliert, auf Strahlung korrigiert und zur Umrechnung in

Tabelle 15

Gas	$p_{mm}$	App. III $\lambda_{rel.}$ Luft = 1	App. I $\lambda_{rel.}$ Luft = 1	Differenz in $\%$	$\lambda_{rel.}$ Mittelwert Luft = 1	$\lambda_{abs.}$ Luft = 566
CO <sub>2</sub> . . .	499,5	0,5965	0,5961	0,65	0,5963	337,5
CO . . .	494,9	0,9544	0,9533	1,16	0,9539	539,9
CH <sub>4</sub> rein	500,0	1,2734	1,2724	0,80	1,2729	720,5
Ar . . .	486,1	0,6996	0,6999	0,50	0,6998	396,1
CH <sub>4</sub> R . .	503,5	1,2882	1,2890	0,62	1,2886	729,3
Propan .	511,5	0,6272	0,6268	0,64	0,6270	354,9

1) Eine empirische Formel zur Korrektur des druckabhängigen Kurventeiles haben Senftleben und Riechemeier angegeben (9).



Absolutwerte auf die zuvor und anschließend gleichermaßen gemessenen und berechneten, übereinstimmenden Luftwerte bezogen.  $\lambda_{\text{Luft } 500 \text{ mm, } 0^\circ \text{ C}} = 566 \cdot 10^{-7} \text{ cal} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1}$  [(1) S. 281], in Tab. 15 einfach als 566 bezeichnet.

Tabelle 16  
Wärmeleitzahlen für Luft,  $\text{CO}_2$ , CO,  $\text{CH}_4$

	Lit.	Luft	$\text{CO}_2$	CO	$\text{CH}_4$
Weber 1917. . . . .	25,114	568,0	339,3		720,0
Weber 1927. . . . .	30	574,0	343,1		
Eucken . . . . .	32,33	(566,0)	337,0	542,5	714,5
Krey . . . . .	22			525	
Ziegler . . . . .	18				746,2
Winkelmann . . . .	3, 59, 76	568	307	499	647
Graetz . . . . .	42	483,8	309,1		
Schleiermacher . . .	16	562	327		
Tab. 15. . . . .		(566,0)	337,5	539,9	720,5

Die mit den beiden, verschieden dicke Drähte enthaltenden Apparaten gefundenen Werte stehen für eine bestimmte Gasfüllung in befriedigender Übereinstimmung. Wie Tab. 16 zeigt, liegen sie auch im Bereich der bisher von andern Forschern gefundenen Werte.

## 2. Der Einfluß der Meßgase auf den Apparat

Bei den Werten der Tab. 15 waren die Messungen stets reproduzierbar und die vorher und anschließend gemessenen Luftwerte stimmten überein. In einigen andern Fällen traf dies jedoch nicht zu, was trotz der Unregelmäßigkeit dieser Erscheinung wegen der sonst so großen Meßsicherheit nicht durch Meßfehler erklärt werden kann. Durchsicht dieser Werte unter Berücksichtigung der zeitlichen Reihenfolge ihrer Messung erweckt den Eindruck, daß es sich dabei vor allem um  $\text{CO}$ ,  $\text{H}_2$  und einige technische, wasserstoffhaltige Gase sowie um anschließend gemessene Luftwerte handelt. Tab. 17.

Eine Änderung des Temperaturkoeffizienten des Heizdrahtwiderstandes würde zum selben extrapolierten  $\lambda_{\text{Luft}}$  führen, eine Änderung vorhandener Konvektion und das Eindringen von Luft in den Apparat ist unwahrscheinlich. Eine andere Erklärung ist, daß der Widerstand der Drähte sich gelegentlich ändert, und es fragt sich, ob dies bei Platindrähten, vielleicht gerade in wasserstoffhaltiger Gasatmosphäre, schon beobachtet wurde.

Bei Durchsicht zahlreicher Abhandlungen über Platinwiderstandsthermometrie fand sich in einer Arbeit von Henning und Heuse (35) die Notiz:

„Die seit 12 Jahren häufig in tiefer Temperatur verwendeten Widerstandsthermometer haben sich als sehr zuverlässig erwiesen. Bei  $-183^{\circ}$  konnte keine Widerstandsänderung nachgewiesen werden, die einer Temperaturänderung von mehr als  $0,01^{\circ}$  entspricht.“

Ferner schreibt Langmuir (36), allerdings bezüglich Wolfram:

„Experiments have shown, that the introduction of gases chemically inert towards tungsten does not alter the relation between resistance and temperature or that between candle-power and temperature.“

Daß  $H_2$  bereits bei Zimmertemperatur von Platin absorbiert wird, zeigte Bodenstein (37) volumetrisch, aber diese Vorgänge sind wenig reproduzierbar.

Diejenigen Forscher, die die Abhängigkeit des Platinwiderstandes von der Gasbeladung untersuchten, mußten, um reproduzierbare Ergebnisse zu erhalten, den Gasgehalt stets durch Glühen in der betreffenden Gasatmosphäre bzw. im Hochvakuum ändern. Kleine (7) betont ausdrücklich, daß bloße Druckänderungen auf den Widerstand keinen Einfluß hatten.

Immerhin kann man der Arbeit von Fräulein Weil (12) und den daselbst erwähnten Abhandlungen entnehmen, daß geglühte Platindrähte bezüglich des Wasserstoffaustausches aktiver sind als ungeglühte, und daß der Widerstand von Platin beim Beladen mit  $H_2$  zunimmt. Besonders wertvoll erscheint aber die Mitteilung, daß während der Messungen sprunghafte, nicht erklärbare Widerstandsänderungen vorkamen und daß gelegentliches Füllen des Apparates mit Luft Unstimmigkeiten zur Folge hatte.

Vgl. auch Suhrmann (38), Bennewitz und Günther (39).

Derartige Widerstandsänderungen scheinen also möglich zu sein, doch ist es nach diesen Mitteilungen unwahrscheinlich, daß sie durch ein Erhitzen um  $10^{\circ}$  eingeleitet werden.

Der Unterschied von Wärmeleitwerten  $\lambda_{r,e}$ , die mit Drähten verschiedener, aber während der Meßreihe unveränderter Sättigung an Gas gemessen sind, ist vermutlich unbedeutend, da bezüglich des empfindlichen  $\Delta w$  die Matthiesensche Regel der Temperaturunabhängigkeit des durch Verunreinigungen verursachten Zusatzwiderstandes für reine Metalle Geltung haben dürfte. Eine weitere Erklärung ist, daß sich die Drahtoberfläche ändert und damit der Akkommodationskoeffizient.

Der geringe Umfang des vorhandenen Zahlenmaterials zwingt auch hier zur Beiziehung ähnlicher, von anderen Forschern gemachter Beobachtungen.

Hier kommen vor allem die Arbeiten von Senftleben in Betracht (9). Herr Senftleben untersuchte die Bildung von molekularem Wasserstoff aus den durch Betrahen eines Gemisches von Wasserstoff und Quecksilberdampf von 10–20 mm Druck mit der Quecksilberresonanzlinie gebildeten Atomen in einem Schleiermacherschen Apparat durch Messung der Wärmeleitfähigkeit während der Wiedervereinigung. Er fand bei Verwendung eines 0,05 mm starken Platinheizdrahtes mangel-

hafte Reproduzierbarkeit, die er damit erklärte, daß eine „Vergiftung“ des Platindrahtes mit Sauerstoff die rasche Wiedervereinigung der Atome an der katalytisch wirkenden Metalloberfläche verhindert, daß die Sauerstoffbeladung aber allmählich von den Wasserstoffatomen unter Wasserbildung verzehrt wird. Dieses Wasser wird unter dem Einfluß des Quecksilberlichtes von den Quarzglaswänden des Apparates in angeregtem Zustand sehr fest absorbiert und ändert so den bei  $H_2$  und den niederen Drucken sehr einflußreichen Temperatursprung und damit die geleitete Wärmemenge. Beide Fehlerquellen konnte er durch Verwendung von wenig katalytisch wirksamem Tantaldraht (40) und Sättigung der Quarzwand mit Wasserdampf für die Dauer *einiger* Messungen beseitigen. Widerstandsänderungen des kalten Drahtes konnten nicht festgestellt werden.

Diese Ergebnisse Senftlebens geben wertvolle Fingerzeige. Was die Folgerungen bezüglich des zu verwendenden Drahtmaterials anbelangt, so ist einer Arbeit von Bonhoeffer (40) zu entnehmen, daß es keine nicht katalytisch wirksamen Edelmetalloberflächen gibt, die somit diese Wechselwirkung zwischen adsorbiertem Sauerstoff und H-Atomen oder, wenn die Umkehr gestattet ist, zwischen atomar gelöstem Wasserstoff und umgebender Luft nicht zeigen würden und somit bei der Wärmeleitungsmessung relativ zu Luft zu bevorzugen wären; Nichtedelmetalldrähte haben andere, größere Nachteile.

Die beste Bestätigung für obige Erklärung ist einer Arbeit von Dobretsberger (10) zu entnehmen, der nach einer von Baily (41) angegebenen Methode Adsorption und Absorption von  $H_2$ ,  $CO_2$  und  $N_2$  bei Platin durch Messung des Gleichstromwiderstandes und des Hochfrequenzwiderstandes (Skineffekt) untersuchte. Dobretsberger fand, daß bei unverändertem Gleichstromwiderstand bei einem durch Glühen im Hochvakuum entgasten Platindraht bei Zimmertemperatur der Hochfrequenzwiderstand durch Adsorption von  $CO_2$  und  $N_2$  vergrößert wurde und bei nachfolgendem Leerpumpen wieder auf den ursprünglichen Betrag zurückging; bei Wasserstoff dagegen änderte sich Gleichstrom- und Hochfrequenzwiderstand, da der Wasserstoff nicht nur an der Oberfläche adsorbiert wurde, sondern sich auch durch Diffusion über den ganzen Querschnitt verteilte (Absorption).

Die Absorption von Gasen im Platindraht ändert durch die Widerstandserhöhung alle Relativwerte und durch die mit Widerstandserhöhung sicherlich verbundene Verkleinerung des Widerstandstemperaturkoeffizienten die Bezugstemperaturen der Einzelwerte. Letzteres wird durch die hier vorgenommene Extrapolation  $\Delta w = 0$  für den Fall, daß die Änderung langsam erfolgt oder schon durch einen stationären Zustand abgelöst ist, für die Wärmeleitungsrelativwerte, nicht aber für die Bestimmung der differentiellen Wärmeleitungstemperaturkoeffizienten, einflußlos. Einzelne zu Absolutbestimmungen ausgewertete Messungen werden hierdurch am meisten beeinflusst, Relativmessungen weniger; gar nicht, sofern man anschließend einen Luftwert messen kann, ehe das absorbierte Gas wieder aus dem Draht herausdiffundiert ist. Eine gewisse Unsicherheit wird sich aber nicht vermeiden lassen, doch kann ihre Größe auf

Luft  
CH<sub>4</sub>R  
Luft  
Propa  
Luft  
Luft  
Wass  
Luft

Grun  
Dräh  
schei  
treffe  
schei

zusta  
schei  
Akko  
Korr  
Temp  
kenn  
belac

mit S  
jewe  
Über

dick  
werd  
geset  
weite

Gase  
wend  
stant  
heit  
die  
einfl  
könn

Tabelle 17  
(Apparat I)

Meßgas	Luftwert	Temp.-Koeff.	Datum
Luft . . . . .	0,29525	0,0027	13. 6. 30
CH <sub>4</sub> R (H <sub>2</sub> -haltig). . . . .			
Luft . . . . .	0,2996	0,0016	14. 6. 30
Propan (rein) . . . . .			4. 7. 30
Luft . . . . .	0,29555	0,0031	
Luft . . . . .	0,2951	0,0035	5. 7. 30
Wasserstoff . . . . .			8. 7. 30
Luft . . . . .	0,2979	0,0018	

Grund der Reproduzierbarkeit solcher, mit Wasserstoff beladenen Drähten gemessener Luftwerte beurteilt werden. Diese Erscheinungen werden wahrscheinlich *nur* bei Wasserstoff anzutreffen sein, da nur dieser in Platin merklich löslich zu sein scheint, Janitzky (42).

Die Adsorption der Gase am Draht wird rasch einen Endzustand erreichen, wird aber bei den meisten Gasen in Erscheinung treten und vom Druck abhängen. Sie ändert den Akkommodationskoeffizienten und läßt sich rechnerisch durch Korrektur auf Temperatursprung beseitigen, sofern man den Temperatursprungkoeffizienten für die betreffende Oberfläche kennt, was jedoch nur für Gleichgewichtszustände der Gasbelastung möglich sein wird.

Um solche Gleichgewichtszustände für Absorption und Adsorption mit Sicherheit annehmen zu dürfen, wäre ein Glühen der Drähte im jeweils neu eingefüllten Meßgas vorteilhaft; aus demselben Grund ist ein Überziehen der Heizdrähte mit Platinschwarz zu erwägen, Knudsen (43).

Der Beseitigung dieser Fehlerquelle durch Verwendung dickerer Heizdrähte ist leider durch die immer einflußreicher werdende Wärmeableitung durch die Drahtenden eine Grenze gesetzt. Außerdem schränkt die Konvektion die Verwendung weiterer Apparatdimensionen und hoher Drucke ein.

Man kommt daher zu folgendem Ergebnis:

Bei der Präzisionsmessung der Wärmeleitfähigkeit der Gase nach den elektrischen Hitzdrahtmethoden darf der verwendete Apparat nicht als vorgegeben und mit unbedingt konstanter, vor oder nach den Messungen bestimmbarer Beschaffenheit ausgestattet betrachtet werden, indem Platindraht und Hülle die einzelnen Gase in verschiedener, die Wärmeströmung beeinflussender Weise adsorbieren und teilweise auch absorbieren können.

Wann dieser Effekt eintritt, läßt sich allerdings noch nicht voraussagen, doch sind Reproduzierbarkeit der Messungen und Übereinstimmung der mit verschiedenen Heizdrahtdicken gewonnenen Zahlen wie auch der zuvor und nachher gemessenen Luftwerte genügend sichere Kriterien für vorhandene Konstanz der Apparate und Zuverlässigkeit der betreffenden, gemessenen Wärmeleitzahl.

### Zusammenfassung

Es wird eine Anordnung nach Eucken zur Messung der Wärmeleitfähigkeit von Gasen beschrieben und durch Kritik der Fehlerquellen gezeigt, daß die Methode mit Sicherheit Wärmeleitzahlen mit  $\pm 1\text{‰}$  Reproduzierbarkeit liefert. Messungen mit 3 Apparaten ergeben, daß diese Reproduzierbarkeit der Absolutgenauigkeit weitgehend gleich gesetzt werden darf.

Als, soweit bekannt, noch nicht gemessen, kann mitgeteilt werden für reines Propan

$$\lambda_0 = 354,9 \cdot 10^{-7} \text{ cal} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1}.$$

Damit berechnet sich die Konstante  $K$  der Beziehung  $\lambda = K \cdot c_v \cdot \eta$  unter Verwendung von  $c_v = 0,286$  (44) und  $\eta_0 = 747; 10^{-7}$  (45) zu

$$K_0 = 1,66 = \frac{5}{3}.$$

### Literatur

- 1) M. Trautz u. A. Zündel, *Ztschr. f. techn. Phys.* **12**. S. 273. 1931.
- 2) A. Eucken, *Phys. Ztschr.* **12**. S. 1102. 1911.
- 3) E. Moser, *Diss.* Berlin 1913.
- 4) T. Isnardi, *Ztschr. f. Elektrochem.* **21**. S. 405. 1915.
- 5) H. Gregory u. C. T. Archer, *Proc. Roy. Soc. London (A)* **110**. S. 91. 1926.
- 6) H. Gregory u. C. T. Archer, *Phil. Mag.* (7) **1**. S. 593. 1926.
- 7) H. Kleine, *Ztschr. f. Phys.* **33**. S. 391. 1925.
- 8) E. Perucca, *Ann. d. Phys.* [5] **4**. S. 256. 1930.
- 9) H. Senftleben, *Naturwissenschaften* 1924. S. 558 und *Ztschr. f. Phys.* **32**. S. 922. 1925; **33**. S. 871. 1925; *Sitzungsberichte d. Ges. zur Beförderung d. ges. Naturwissenschaften zu Marburg* Nr. 6 vom Nov. 1924. H. Senftleben u. O. Riechmeier, *Ann. d. Phys.* [5] **6**. S. 105. 1930 und *Phys. Ztschr.* **30**. S. 745. 1929.
- 10) H. Dobretsberger, *Ztschr. f. Phys.* **65**. S. 334. 1930.
- 11) S. Weber, *Ann. d. Phys.* [4] **54**. S. 325. 1917 und *Habilitations-schrift* Kopenhagen 1916.
- 12) K. Weil, *Ztschr. f. Phys.* **64**. S. 237. 1930.
- 13) E. Aschkinass, *Ann. d. Phys.* [4] **17**. S. 960. 1905.
- 14) E. Schmidt, *Wärmestrahlung technischer Oberflächen bei gewöhnlicher Temperatur*, München u. Berlin bei R. Oldenbourg 1927. (Sammlung Beihefte zum Gesundheitsing. Reihe I, Heft 20.)

- 15) W. Nusselt, Mitt. über Forschungsarb. d. Ver. d. Ing. Heft 264 von 1923: Wärmeübertragung in der Verbrennungskraftmaschine.
- 16) F. Merkel, Grundlagen der Wärmeübertragung, Dresden und Leipzig bei Th. Steinkopf 1927.
- 17) M. A. Schirmann, Phys. Ztschr. 25. S. 631. 1924; 27. S. 659. 1926.
- 18) L. Graetz, Wied. Ann. 14. S. 232 u. 541. 1881 und Habilitationsschrift München 1881.
- 19) W. Gerlach, Ann. d. Phys. [5] 4. S. 571. 1930.
- 20) A. Winkelmann, Wied. Ann. 11. S. 474. 1880.
- 21) Wien-Harms, Handb. d. Experimentalphysik IX, 1. S. 326.
- 22) A. Kundt u. E. Warburg, Pogg. Ann. 156. S. 177. 1875; Monatsber. d. Berliner Ak. S. 160. 1875.
- 23) M. ten Bosch, Die Wärmeübertragung. Springer Berlin S. 72. 1922.
- 24) B. Ray, Proc. of the Indian Ass. for the Cult. of Science Calcutta 6. S. 95. 1920—21.
- 25) S. C. Pramanik, Proc. of the Indian Ass. for the Cult. of Science Calcutta 7. S. 114. 1921—22.
- 26) R. Seeliger, Phys. Ztschr. 26. S. 282. 1925.
- 27) A. Wassiljewa, Diss. Göttingen 1905.
- 28) W. P. White, Phys. Rev. (2) 10. S. 743. 1917.
- 29) S. Weber, Ann. d. Phys. [4] 82. S. 479. 1927 und Habilitationsschrift Kopenhagen 1916.
- 30) A. Schleiermacher, Wied. Ann. 34. S. 623. 1888.
- 31) S. Weber, Ann. d. Phys. [4] 54. S. 437. 1917 und Habilitationsschrift Kopenhagen 1916.
- 32) D. Enskog, Kungl. Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar Bd. 63. Nr. 4. 1922.
- 33) M. Trautz, Ann. d. Phys. [5] 8. S. 797. 1931.
- 34) M. v. Smoluchowski, Wied. Ann. 64. S. 101. 1898 und Ann. d. Phys. (4) 35. S. 983. 1911.
- 35) F. Henning u. W. Herse, Ztschr. f. Phys. 23. S. 116. 1924.
- 36) I. Langmuir, General Electric Review 19. S. 208. 1916.
- 37) M. Bodenstein, Ztschr. f. phys. Chem. 46. S. 736. 1903.
- 38) R. Suhrmann, Ztschr. f. Phys. 19. S. 1. 1923.
- 39) K. Bennewitz u. P. Günther, Ztschr. f. phys. Chem. 111. S. 257. 1924.
- 40) K. F. Bonhoeffer, Ztschr. f. phys. Chem. 113. S. 199. 1924 und Ergebnisse d. exakten Naturw. 6. 1927.
- 41) A. Baily, Phys. Rev. (2) 20. S. 154. 1922.
- 42) A. Janitzky, Ztschr. f. Phys. 31. S. 277. 1925.
- 43) M. Knudsen, Ann. d. Phys. [4] 34. S. 593. 1911.
- 44) M. Trautz u. W. Badstübner, Ann. d. Phys. [5] 8. S. 185. 1931.
- 45) K. Sorg, Diss. Heidelberg 1931.

Heidelberg.

(Eingegangen 24. März 1933)

## **Strahlung von Antennen unter dem Einfluß der Erdbodeneigenschaften**

**E. Strahlung in die Erde hinein**

**Von M. J. O. Strutt**

(Naturkundig Laboratorium der N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken  
Eindhoven/Holland)

(Mit 2 Figuren)

In den vorhergehenden Arbeiten obigen Titels<sup>1)</sup> haben wir uns mit dem folgenden Problem beschäftigt.

Ein Dipol oder eine Antenne befindet sich in einem Medium ohne Leitfähigkeit mit einer dielektrischen Konstante gleich eins. Dieses Medium nimmt den ganzen oberen Halbraum ein und grenzt in einer Ebene an ein zweites Medium, das eine dielektrische Konstante  $\epsilon$  und eine Leitfähigkeit  $\sigma$  hat. Berechnet wurde das Strahlungsfeld in großem Abstand vom Dipol bzw. von der Antenne, im zuerstgenannten Medium (Luft).

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung des Strahlungsfeldes im zweiten Medium (Erde), ebenfalls in großem Abstand vom Dipol (bzw. von der Antenne). Wie groß dieser Abstand sein muß, damit unsere Formeln gelten, wird unten angegeben.

Die Berechnungsmethode ist die gleiche, welche wir in unserer zitierten Arbeit C verwendeten<sup>2)</sup>; es ist die Laplacesche asymptotische Integrationsmethode, welche bereits H. Weyl<sup>3)</sup> und sein Schüler E. Funk<sup>4)</sup> für den Fall eines vertikalen elektrischen Dipols angewandt haben. Während H. Weyl sich auf das Feld in der Luft beschränkt, enthält die Dissertation E. Funks eine Berechnung des Erdfeldes für den vertikalen elektrischen Dipol. Unser Ergebnis für diesen Fall, in etwas allgemeinerer

1) Vgl. A: *Ann. d. Phys.* [5] 1. S. 721—750. 1929. B: S. 751—772. C: [5] 4. S. 1—16. 1930. D: [5] 9. S. 67—91. 1931.

2) Vgl. *Ann. d. Phys.* [5] 4. S. 1—16. 1930.

3) H. Weyl, *Ann. d. Phys.* 60. S. 485. 1919.

4) E. Funk, *Diss. Zürich* 1921.



Form und auf etwas anderem Wege wie dasjenige E. Funks gewonnen, stimmt mit seiner Formel überein. Neu dürften unsere Formeln für horizontale elektrische und magnetische, sowie für vertikale magnetische Dipole sein.

# I. Bemerkungen über die verwendeten Integrale

Wir ziehen vom Mittelpunkt einer Einheitskugel 6 Strahlen, welche die Kugeloberfläche in den Punkten  $PQR$ TX Z treffen. Letztere zwei Fahrstrahlen stehen senkrecht zueinander. Die Konfiguration ist in Fig. 1 veranschaulicht worden. Es sollen  $P$  und  $Q$  einerseits und  $R$  und  $T$  andererseits auf zwei verschiedenen Kugelhälften liegen, wobei die Hälften durch eine senkrecht zu  $Z$  durch  $X$  gehende Ebene getrennt werden. Zwischen den Winkeln bestehen nachfolgende Beziehungen:

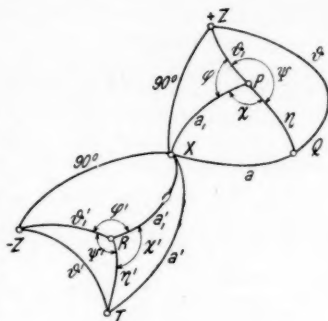


Fig. 1. Winkelbezeichnungen

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \text{a) } \varphi = \varphi' \\ & \text{b) } \sin \vartheta = n \sin \vartheta' \end{aligned} \right\} \text{ (Brechungsgesetz von Snellius);} \\ (1) & \left. \begin{aligned} & \text{c) } \cos \vartheta' = \cos \vartheta_1' \cos \eta' + \sin \vartheta_1' \sin \eta' \cos \psi'; \\ & \text{d) } \cos \vartheta = \cos \vartheta_1 \cos \eta + \sin \vartheta_1 \sin \eta \cos \psi; \\ & \text{e) } \cos \alpha' = \cos \alpha_1' \cos \eta' + \sin \alpha_1' \sin \eta' \cos \chi'. \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Wir betrachten folgendes Integral:

$$(2) \left\{ J = \int_0^{\frac{\pi}{2} + i\infty} d\vartheta \int_0^{2\pi} \exp[-ik_2\{-z \cos \vartheta' + (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \sin \vartheta'\} - ik_1 \cdot d \cos \vartheta] f(a \vartheta) \sin \vartheta d\varphi. \right.$$

Aus (1b) ist abzuleiten:

$$(3) \quad \sin \vartheta d\vartheta = n^2 \frac{\cos \vartheta'}{\cos \vartheta} \sin \vartheta' d\vartheta'.$$

1) Vgl. Ann. d. Phys. 4. S. 3. 1930.

Den Fahrstrahl  $OR$  bezeichnen wir mit  $R$ ; dann ist

$$-z \cos \vartheta' + (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \sin \vartheta = R \cos \eta'$$

$$\text{und } \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi = \sin \eta' d\eta' d\psi,$$

folglich

$$J = n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2} + i\infty} d\eta' \int_0^{2\pi} d\psi' \exp(-ik_2 R \cos \eta' - ik_1 d \cos \vartheta) \cdot \sin \eta' \cdot \frac{\cos \vartheta'}{\cos \vartheta}.$$

Mit

$$ik_2 (\cos \eta' - 1) = t; \quad -ik_2 \sin \eta' d\eta' = dt$$

wird dieses Integral:

$$J = \frac{e^{-ik_2 R}}{R} R \cdot \frac{n_2}{-ik_2} \int_0^\infty dt \cdot e^{-Rt} \int_0^{2\pi} e^{-ik_1 d \cos \vartheta} f(a \vartheta) \frac{\cos \vartheta'}{\cos \vartheta} d\psi'.$$

Wir setzen

$$\bar{q} = \int_0^{2\pi} e^{-ik_1 d \cos \vartheta} f(a \vartheta) \frac{\cos \vartheta'}{\cos \vartheta} d\psi$$

und finden

$$J = \frac{e^{-ik_2 R}}{R} \frac{in^2}{k_2} \left\{ \bar{q}_0 + \frac{A_1}{R} + \frac{A_2}{R^2} + \dots \right\},$$

wo

$$(4) \quad \bar{q}(t) = \bar{q}_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots$$

Für  $t = 0$ , d. h. bei Beschränkung auf das Hauptglied der Taylorreihe (4) wird  $\cos \eta' = 1$  und  $\sin \eta' = 0$ , folglich nach (1d) und (1e):

$$\bar{q}_0 = q(a_1 \vartheta_1) = 2\pi e^{-ik_1 d \cos \vartheta_1} f(a_1 \vartheta_1) \frac{\cos \vartheta_1'}{\cos \vartheta_1}.$$

In dieser ersten asymptotischen Näherung ist somit:

$$(2a) \quad J = \frac{2\pi in^2}{k_2} \frac{e^{-ik_2 R}}{R} e^{-ik_1 d \cos \vartheta_1} f(a_1 \vartheta_1) \frac{\cos \vartheta_1'}{\cos \vartheta_1} + O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

## II. Vertikale elektrische und magnetische Dipole

Nach E. Funk ist das Hertzsche Vektorpotential eines vertikalen Dipols, dessen Lage in bezug auf das Koordinatensystem durch Fig. 2 veranschaulicht wird, durch das Integral (2) des vorigen Abschnitts (bis auf einen konstanten Faktor) ge-

geben. Die verschiedenen Winkel der Fig. 1 sind auch in Fig. 2 eingezeichnet worden. Physikalisch kann die Bildung des Integrales (2) folgendermaßen erläutert werden. Der Dipol sendet ein ganzes Bündel Wellen nach allen Richtungen aus. Für jede einzelne Strahlungsrichtung kann die Wellenfront in einem kleinen Raumelement als eben betrachtet werden. Alle diese ebenen Wellen, deren Strahlungsrichtung in die untere ( $-Z$ )-Halbkugel hineinweist, treffen auf die Grenzebene zwischen Luft und Erde; sie werden an dieser Grenzebene nach dem Gesetz von Snellius gebrochen. In der Fig. 2 sind zwei solche Strahlen mit reellen Einfallswinkeln  $\vartheta$  gezeichnet worden.

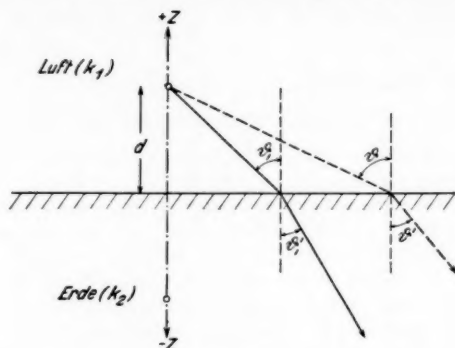


Fig. 2

Man muß freilich, um *alle* gebrochenen Strahlen zu erhalten, auch komplexe Winkel  $\vartheta$  in Betracht ziehen. Wenn man einen gewissen Strahl mit den Winkeln  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_1'$  (Fig. 2) verfolgt, kann in die Richtung  $\vartheta_1'$  außer auf dem gezeichneten Wege auch noch auf andere Weise, nämlich durch Brechung von einfallenden Strahlen mit anderen Winkeln  $\vartheta$  und  $\vartheta'$ , Strahlung gelangen. Diese Nebenstrahlung, zusammen mit dem Hauptbündel ( $\vartheta_1, \vartheta_1'$ ), ergibt die gesamte Strahlung im Punkte  $R$  der Erde. Es muß also, um die Strahlung in  $R$  zu erhalten, über alle  $\vartheta$  in der Luft und somit  $\vartheta'$  in der Erde integriert werden [Gl. (3)]. Das Ergebnis der Rechnung besagt (Gl. 2a), daß in erster Näherung für sehr große Werte von  $k_2 R$  ( $R$  Abstand vom Koordinatennullpunkt):  $|k_2 R| \gg 1$  nur solche Strahlung nach  $R$  gelangt, die unter dem Winkel  $\vartheta_1$  (Fig. 2) auf die Grenzebene trifft. Es ist also in diesem Fall nur die erste Fresnelzone zu berücksichtigen.

Man überzeugt sich leicht davon, daß das Ergebnis (2a) mit demjenigen E. Funks bei dem von ihm ausschließlich behandelten Fall eines vertikalen elektrischen Dipols für großes  $R$  übereinstimmt. Mit einem Dipolmoment  $m$  ergibt sich für das Vektorpotential  $\Pi_e$  in der Erde der Ausdruck:

$$(5) \quad \Pi_e = i k m n^2 \frac{e^{-i k_2 R}}{R} e^{-i k d \gamma} f(a_1 \vartheta_1) \frac{\gamma'}{n \gamma},$$

wo im Falle eines elektrischen Dipols gilt:

$$(6) \quad f_{\text{el.}} = \frac{2 n^2 \gamma}{n^2 \gamma + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}}$$

und für einen magnetischen Dipol:

$$(7) \quad f_{\text{magn.}} = \frac{2 \gamma}{\gamma + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}} \cdot \frac{1}{i k}.$$

Weiter gelten die Beziehungen:

$$n^2 = \varepsilon - i \sigma \lambda \cdot 6 \cdot 10^{12},$$

$\sigma$  Leitfähigkeit der Erde in elektromagnetischen Einheiten,  
 $\varepsilon$  dielektrische Konstante der Erde,  
 $\lambda$  verwendete Wellenlänge, gemessen in Luft, ausgedrückt in m,

$$k = k_1 = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$k_2 = n k,$$

$$\gamma = \cos \vartheta_1,$$

$$\gamma' = \cos \vartheta_1',$$

$$1 - \gamma^2 = n^2 (1 - (\gamma')^2).$$

In der Erde müssen wir, um das Strahlungsdiagramm zeichnen zu können, alle Winkelgrößen in  $\gamma'$  ausdrücken.

Wir betrachten im Anschluß an (5) zwei einfache Fälle. Zunächst soll für sehr großes  $|n|$  keine Strahlung in die Erde gelangen. Es muß  $\Pi_e$  in diesem Fall verschwinden. Tatsächlich enthält  $\Pi_e$  den Faktor:

$$e^{-i k d \gamma} = e^{i k d n \sqrt{\frac{1}{n^2} - 1 + (\gamma')^2}}.$$

Weil  $n \gg 1$  ist, verschwindet demnach  $\Pi_e$  exponentiell. Die Faktoren (6) und (7) schreiben sich in  $\gamma'$ :

$$(6a) \quad \frac{\gamma'}{n \gamma} f_{\text{el.}} = \frac{1}{n^2} \frac{2 \gamma'}{\frac{\gamma'}{n^2} + \sqrt{\frac{1}{n^2} - 1 + (\gamma')^2}};$$

$$(7a) \quad \frac{\gamma'}{n \gamma} f_{\text{magn.}} = \frac{1}{n^2} \frac{2 \gamma'}{\gamma' + \sqrt{\frac{1}{n^2} - 1 + (\gamma')^2}} \cdot \frac{1}{i k}.$$

Sie verschwinden demnach ebenfalls für  $|n| \rightarrow \infty$ . Im Falle  $d = 0$ , also für ein Dipol auf der Erdoberfläche, konnte in einer früheren Arbeit (A, S. 733; B, S. 758) die Strahlung in die Erde hinein durch eine einfache Überlegung gewonnen werden. Die damals publizierten Ausdrücke stimmen mit den obigen Formeln überein.

Die Strahlung in die Erde hinein hat als Funktion von  $\gamma'$  ein Maximum für

$$(8) \quad \frac{1}{n^2} - 1 + (\gamma'_{\max})^2 \cong 0; \quad \gamma'_{\max} \cong \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}},$$

wenn  $|nkd|$  nicht zu klein gegen 1 ist. Das Hertzsche Potential trägt in diesem Falle bei einem vertikalen elektrischen Dipol:

$$\Pi_{e \max} = i k m \frac{e^{-i k_2 R}}{R} \cdot 2 n^2$$

und bei einem vertikalen magnetischen Dipol:

$$\Pi_{e \max} = m \frac{e^{-i k_2 R}}{R} \cdot 2.$$

Bemerkenswerterweise hat bei nicht zu kleinem  $|nkd|$  die Dipolhöhe  $d$  über der Erde weiter auf  $\gamma'_{\max}$  keinen Einfluß. Für komplexes  $n$  gibt es keinen reellen Strahlungswinkel  $\gamma'$ , für den (8) erfüllt ist. Im Falle eines reellen  $n$  nähert sich  $\arccos \gamma'_{\max}$  bei steigendem  $n$  immer mehr der senkrecht nach unten in die Erde hineinweisenden Strahlungsrichtung. Im magnetischen Fall ist  $\Pi_{e \max}$  konstant bei steigendem  $n$ ; im elektrischen Fall nimmt  $\Pi_{e \max}$  proportional zu  $n^2$  zu.

Zur Berechnung der Strahlung, d. h. des Poyntingschen Vektors aus den Hertzschen Potentialen, müssen für den elektrischen und den magnetischen Fall die Feldstärken aus  $\Pi_e$  berechnet werden. Wenn  $\mathcal{E}$  die elektrische und  $\mathcal{H}$  die magnetische Feldstärke darstellen, ist für elektrische Dipole:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{i k n^2} [\text{grad div } \Pi + k^2 n^2 \Pi];$$

$$\mathcal{H} = \text{rot } \Pi,$$

und für magnetische Dipole:

$$\mathcal{E} = -i k \text{rot } \Pi;$$

$$\mathcal{H} = \text{grad div } \Pi + k^2 n^2 \Pi.$$

Folglich ist bei großem  $R$  im elektrischen Fall

$$P = [\mathcal{E} \mathcal{H}^*] = \{1 - (\gamma')^2\} n k^2 |\Pi_e|^2$$

( $\mathcal{H}^*$  konjugiert komplex zu  $\mathcal{H}$ )

und im magnetischen Fall:

$$P = [\mathfrak{E} \mathfrak{S}^*] = \{1 - (\gamma')^2\} n^3 k^4 |\Pi_e|^2.$$

Hieraus ist zu ersehen, daß der Ausdruck für den Poynting-schen Vektor  $P$  in der Richtung der maximalen Strahlung bei reellem  $n$  für elektrische Dipole bei steigendem  $n$  proportional zu  $n^3$  wächst, bei magnetischen Dipolen aber proportional zu  $n$ , ein konstantes Dipolmoment vorausgesetzt.

### III. Horizontale elektrische und magnetische Dipole

Bei horizontalen Dipolen, die wir wieder in der  $+z$ -Achse in einer Höhe  $z = d$  und mit ihrer Achse parallel zu  $x$  gelegen denken, hat das Hertz'sche Potential bekanntlich infolge der Erdströme zwei Komponenten. Für die Komponente in der  $x$ -Richtung gelten im wesentlichen die gleichen Formeln, wie bei vertikalen elektrischen und magnetischen Dipolen. Man hat für diese beiden Fälle:

$$(9) \quad \Pi_{ex} = i k m n^2 \frac{e^{-i k_z R}}{R} e^{i k d \gamma} f \frac{\gamma'}{n \gamma},$$

wobei im elektrischen Falle gilt:

$$\frac{\gamma'}{n \gamma} f_{\text{el.}} = \frac{1}{n^2} \frac{2 \gamma'}{\gamma' + \sqrt{\frac{1}{n^2} - 1 + (\gamma')^2}}$$

und im magnetischen Falle:

$$\frac{\gamma'}{n \gamma} f_{\text{magn.}} = \frac{1}{n^2} \frac{2 \gamma'}{\frac{\gamma'}{n^2} + \sqrt{\frac{1}{n^2} - 1 + (\gamma')^2}} \cdot \frac{1}{i k}.$$

Die ganze Rechnung, welche zu (9) führt, läuft genau der in Abschnitt II angedeuteten parallel.

Die vertikalen Komponenten der Hertz'schen Potentiale unterscheiden sich dadurch von den horizontalen, daß der Faktor  $f$  hier außer von  $\gamma$  auch von  $\alpha = \cos a_1$  abhängt. Es ist für horizontale elektrische und magnetische Dipole unter Benutzung von (2a) bzw.:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_{ze} = \left\{ i k m \right\} n^2 \cdot \frac{e^{-i k_z R}}{R} \cdot e^{-i k d \gamma} \\ \cdot \frac{2 \alpha \gamma (1 - n^2)}{(\gamma + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2})(n^2 \gamma + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2})} \cdot \frac{\gamma'}{n \gamma} \end{array} \right.$$

Wir rechnen zunächst die Winkelgrößen auf  $\alpha' = \cos \alpha_1'$  und  $\gamma'$  um:

$$\alpha = \sqrt{1 - \gamma^2} \cdot \cos \varphi = n \sqrt{1 - (\gamma')^2} \cos \varphi = n \alpha';$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{2 \alpha \gamma (1 - n^2)}{(\gamma + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2})(n^2 \gamma + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2})} \cdot \frac{\gamma'}{n \gamma} \\ & = \frac{2 \alpha' \gamma' (1 - n^2)}{n^2 (\gamma' + W) (\gamma' + n^2 W)}, \end{aligned} \right.$$

$$\text{wo } W = \sqrt{\frac{1}{n^2} - 1 + (\gamma')^2}.$$

Bei reellem  $n$  sind die Hertzischen Potentiale in der Erde für  $n k R \gg 1$  und  $n k d$  nicht zu klein wieder maximal, als Funktion von  $\gamma'$ , bei  $(\gamma'_{\max})^2 = 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2$ . Es ergeben sich für diese Strahlungsrichtung die Ausdrücke:

beim horizontalen elektrischen Dipol:

$$(12) \quad \Pi_{xe\max} = i k m \frac{e^{-i k_1 R}}{R} \cdot 2;$$

$$(13) \quad \Pi_{ze\max} = i k m \frac{e^{-i k_1 R}}{R} \cdot 2 n \cdot \cos \varphi \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}};$$

beim horizontalen magnetischen Dipol:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi_{xe\max} &= m \frac{e^{-i k_1 R}}{R} \cdot 2 n^2, \\ \Pi_{ze\max} &= m \frac{e^{-i k_1 R}}{R} \cdot 2 n \cdot \cos \varphi \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}. \end{aligned} \right.$$

Zur Berechnung der Strahlung, d. h. des Poyntingschen Vektors, muß wieder auf die angeführten Gleichungen zurückgegriffen werden, die gestatten, die Feldstärken aus den Hertzischen Potentialen zu berechnen. Es liegt indessen eine Formel<sup>1)</sup> fertig vor, welche das Vektorprodukt von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}^*$ , d. h. den Poyntingschen Vektor für großes  $R$  direkt mit den Hertzischen Potentialen verknüpft. Sie lautet:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}^*] &= Q k^2 \{ (1 - (\alpha')^2) |\Pi_x|^2 + (1 - (\gamma')^2) |\Pi_z|^2 \\ &\quad - 2 \alpha' \gamma' R e(\Pi_x \Pi_z^*) \} \\ &\quad (\Pi_z^* \text{ konjugiert komplex zu } \Pi_z), \end{aligned} \right.$$



wobei im elektrischen Fall gilt  $Q = n$  und im magnetischen Fall  $Q = n^3 \cdot k^2$ . Diese Formel (15) erlaubt für beide horizontale Dipolarten die Strahlung in die Erde hinein vollständig zu diskutieren.

Bezeichnet man das Vektorprodukt von  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{H}^*$  mit  $P$ , so ergeben sich für  $P$  in den Richtungen maximaler Strahlung die Ausdrücke:

$$P \text{ (el. vert. max.)} = \frac{k^4 m^4}{R^3} \cdot 4 n^3;$$

$$P \text{ (magn. vert. max.)} = \frac{k^4 m^2}{R^2} \cdot 4 n;$$

$$P \text{ (el. horiz. max.)} = \frac{k^4 m^2}{R^2} \cdot 4 n; (\cos \varphi = 0);$$

$$P \text{ (magn. horiz. max.)} = \frac{k^4 m^2}{R^2} \cdot 4 n^7; (\cos \varphi = 0).$$

Auf praktische Anwendungen der erhaltenen Formeln, z. B. zur Erforschung des Erdreichs nach Mineralien mittels elektromagnetischer Wellen und Einfluß der Erdbodeneigenschaften auf die Impedanz von Antennen werden wir an anderer Stelle eingehen.

Die obigen Endformeln lagen bereits bei der Niederschrift der ersten Arbeit dieser Serie (1928) fertig vor. Ihre Veröffentlichung wurde durch anderweitige Arbeit bis jetzt verzögert.

Eindhoven, Februar 1933.

(Eingegangen 7. April 1933)

## **Das Verhalten einer Elektronenröhre mit ferromagnetischer Anode im Magnetfeld**

**Von H. A. Schwarzenbach**

(Mit 13 Figuren)

### **Zusammenfassung**

Es werden zeitliche Änderungen der Elektronenströme in einer einem achsenparallelen Magnetfeld unterworfenen zylindersymmetrischen Triode beschrieben. Als Ursache dieser Erscheinungen werden Magnetfeldänderungen, hervorgerufen durch Temperaturänderungen des aus Nickel hergestellten Anodenzylinders nachgewiesen. Der Zusammenhang zwischen der die Anodentemperatur bestimmenden Energie des Elektronenbombardements und dem im Innern der Anode herrschenden Magnetfeld wird am Beispiel der kritischen Magnetfeldstärke untersucht.

§ 1. Die Anordnung einer zylindersymmetrischen Elektronenröhre in einem achsenparallelen homogenen Magnetfeld ist besonders übersichtlich und hat deshalb mannigfache experimentelle und theoretische Behandlung, sowie praktische Anwendung gefunden.

So wurde von Greinacher (1) zum ersten Mal versucht, eine *Diode* (Glühfaden in der Achse einer zylindrischen Anode) im Magnetfeld für eine  $e/m$ -Bestimmung der austretenden Glüh-Elektronen zu benutzen. Später wurde diese Anordnung besonders von Hull (2) untersucht und als „Magnetron“ für Schwingungserzeuger und Verstärker in die Radiotechnik eingeführt (3). Das Magnetron wurde ferner zur Erzeugung hochfrequenter Elektronenschwingungen angewendet, so besonders von Slutzkin und Steinberg (4), Žaček (5), Yagi (6), Okabe (7), Ranzi (8), Hollmann (9), Sahánek (10), Slutzkin und Leljakow (11) und Collenbusch (12). Dank ihrer Empfindlichkeit wird dieselbe Anordnung nach Rössiger (13) zur Messung schwacher magnetischer Felder und Feldänderungen, insbesondere der Erdfeldkomponenten, benutzt.

Die magnetisch gesteuerte *Triode* (Glühfaden in der gemeinsamen Achse von Zylindergitter und -Anode) wurde nach einer ersten Untersuchung durch Greinacher (14) besonders

von Braunbek (15) theoretisch behandelt. Lange (16) benutzte sie zur Trennung der auf Gitter und Anode fließenden primären und sekundären Elektronenströme. Im Hinblick auf die Erzeugung schneller Elektronenschwingungen wurde die Anordnung untersucht von Forró (17), Tank und Schiltknecht (18) und Völker (19).

§ 2. Die vorliegende Abhandlung bezieht sich auf Erscheinungen von vorwiegend praktischer Bedeutung in einer, einem homogenen Magnetfeld unterworfenen Triode mit positivem Gitter und positiver Anode, unter absichtlichem Ausschluß von Schwingungsvorgängen.

Die in einer solchen Anordnung sich ergebenden bekannten Beziehungen zwischen dem gemessenen Anodenstrom  $J_a$ , der

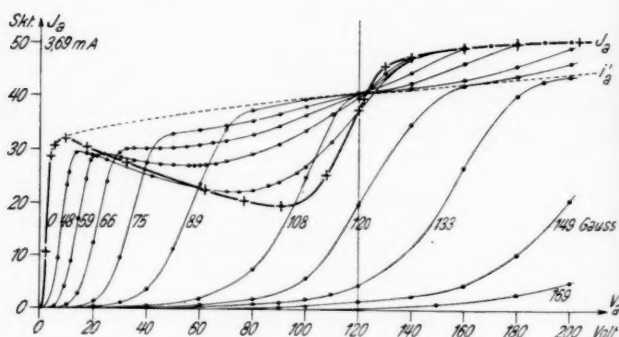


Fig. 1. Charakteristiken bei  $V_g = 120$  Volt.  
Parameter: Magnetfeld  $H$  in Gauss

Anodenspannung  $V_a$  und dem überlagerten Magnetfelde  $H$  bei konstanter positiver Gitterspannung  $V_g$  sind durch die Kurvenschar der Fig. 1 wiedergegeben. (Die Kurven wurden mit Hilfe der im folgenden zu besprechenden Meßanordnung gewonnen). Die stark ausgezogene Kurve bei  $H = 0$  wird durch das Maximum bei kleinem  $V_a$  und die Stelle  $V_a = V_g$  in drei verschiedene Gebiete geteilt: 1. den ersten Anstieg  $i_g$  bis zum Maximum (Raumladung), 2. die große Senkung bei  $V_a < V_g$ , hervorgerufen durch die von der Anode zum Gitter zurücklaufenden Sekundärelektronen ( $J_a = i_a' - i_g''$ ), 3. das Gebiet bei  $V_a > V_g$ , wo die vom Gitter zur Anode gelangenden Sekundär-

elektronen den Anodenstrom vergrößern ( $J_a = i_a' + i_a''$ ). Der mutmaßliche primäre Anodenstrom  $i_a'$  ist gestrichelt eingezeichnet (20).

Das Magnetfeld wirkt nun zunächst nur auf die langsamen Elektronen: erstens auf den primären Anodenstrom bei kleinen  $V_a$ , d. h. der erste Anstieg von  $J_a$  wird mehr und mehr verzögert; zweitens auf die Sekundärströme dort, wo die beschleunigende Potentialdifferenz  $V - V_a$ , bzw.  $V - V_g$  klein ist, d. h. die Kurven schmiegen sich in der Umgebung der Stelle  $V = V_g$  der Kurve des Primäranodenstromes  $i_a'$  an. Dies bildet einen wesentlichen Anhalt für die Konstruktion der Primärstromkurve (21). Der Durchgang aller Kurven durch einen Punkt ganz in der Nähe von  $V_a = V_g$  zeigt ferner, daß hier die Sekundärströme merklich verschwinden. Bei größeren Magnetfeldern wird schließlich die Anode auch bei  $V_a = V_g$  von den Primärelektronen nicht mehr vollzählig erreicht; die Kurven verlaufen mehr und mehr unterhalb des gemeinsamen Punktes.

Der Gitterstrom ist in dieser, wie auch in den folgenden Figuren mit Rücksicht auf die Übersichtlichkeit nicht eingezeichnet. Da jedoch der Emissionsstrom  $J_e$  bei jedem der Versuche konstant gehalten wurde, ist der Verlauf von  $J_g$  an Hand der trivialen Beziehung  $J_e = J_a + J_g$  leicht zu ermitteln. Die Kurven für  $J_g$  liegen demnach spiegelbildlich zu denjenigen für  $J_a$  mit einer Symmetrieachse in der Höhe von  $J_e/2$ .

§ 3. Die bei den Messungen verwendete *Apparatur* mußte aus äußeren Gründen und zur Vornahme kleiner Verbesserungen mehrmals umgebaut werden; sie ist in ihren wesentlichen Teilen jedoch unverändert geblieben.

Fig. 2 zeigt schematisch die Schaltung zur Untersuchung der Röhre. Es bedeutet  $P$  ein Potentiometer (0—200 Volt), dessen vier Abnehmer mittels des zweipoligen Umschalters  $U_p$  je paarweise mit der Anoden- und Gitterzuleitung verbunden werden konnten. Die Umschalter  $S_{ax}$  und  $S_{gy}$  ermöglichten es, beliebige zusätzliche Batterien  $X$  und  $Y$  in die Anoden- und Gitterzuleitung einzuschalten. Durch den Umschalter  $S_{ag}$  konnte die Anode mit dem Gitter verbunden werden ( $V_a = V_g$ ); durch  $S_{a0}$  und  $S_{g0}$  konnten Anode und Gitter beliebig mit dem Potential-nullpunkt 0 verbunden werden ( $V_a = 0$ ,  $V_g = 0$ ). Diese mannigfachen Schalter hatten den Zweck, ein momentanes Umschalten der Röhre von einer Betriebsbedingung ( $V_a'$ ,  $V_g'$ ) auf eine andere ( $V_a''$ ,  $V_g''$ ) zu ermöglichen. Sie waren deshalb so

konstruiert und aufgestellt, daß sie leicht und gleichzeitig betätigt werden konnten.

Von den drei in der Röhre auftretenden Strömen  $J_a$ ,  $J_g$  und  $J_g$  wurden jeweils nur zwei, nämlich entweder  $J_a$  und  $J_g$  oder  $J_a$  und  $J_g$  gemessen, woraus der dritte berechenbar war. Als Meßinstrumente wurden dabei Präzisions-Milliamperemeter von Siemens & Halske und zu den letzten erwähnten Versuchen ein Galvanometer nach Diesselhorst mit passenden Widerständen verwendet.

Die am Potentiometer  $P$  eingestellten und die an Gitter und Anode liegenden Spannungen wurden mittels eines Wählers  $W$  durch ein Präzisionsvoltmeter (0 bis

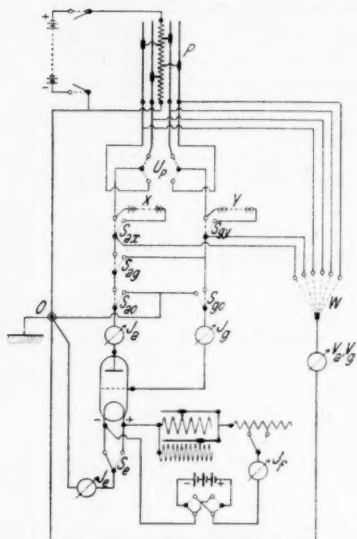


Fig. 2. Schaltungsschema

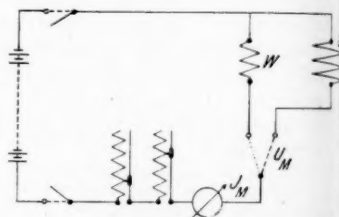


Fig. 3. Schema der Magnetfeldschaltung

250 Volt) von Hartmann & Braun gemessen. Anoden- und Gitterspannung sind bei allen Versuchen, entsprechend der im Schema eingezeichneten Stellung des Umschalters  $S_a$ , auf das negative Glühfadenende bezogen.

Der Heizkreis war, infolge der Verwendung geeigneter Akkumulatoren, dicker Leitungsdrähte und besonderer Regulierwiderstände mit guten Kontakten, so störungsfrei, daß Schwankungen des Emissionsstromes bei der Meßgenauigkeit von  $0,5\%$  nicht nachzuweisen waren.

Da die das Potentiometer  $P$  speisende Batterie tagsüber wechselnden Belastungen durch andere Anschlüsse unterworfen war, mußten, im Hinblick auf eine genügende Konstanz der

Spannung, fast sämtliche Messungen des Nachts ausgeführt werden.

Das Magnetfeld wurde durch eine die Röhre umgebende stromdurchflossene Spule erzeugt. In dem diesbezüglichen Schaltungschema der Fig. 3 bedeutet  $W$  einen regulierbaren Widerstand, der demjenigen der Spule  $S$  gleichgemacht worden war. So konnte mit dem Umschalter  $U_M$ , ohne Änderung des Stromes in den Vorschaltwiderständen, das Magnetfeld beliebig ein- und ausgeschaltet werden. Dadurch ließen sich Temperaturschwankungen in den Vorschaltwiderständen und daraus folgende Strom- und Feldschwankungen nach dem Einschalten vermeiden. Ein Strom  $J_M$  von 1 Amp. erzeugte in der Spulenmitte ein Feld von 20,21 Gauss.

Die Versuche wurden mit einer kleinen Zenith-Senderöhre, Type  $WA\ 20\ A$ , mit reinem Wolframfaden, Spiralgitter aus Molybdändraht und Anode aus Nickelblech von 0,15 mm Dicke ausgeführt. Die Abmessungen der Elektroden betrugen: für die Anode  $R_a = 7,5\text{ mm}$ ,  $L_a = 20\text{ mm}$ , für das Gitter  $R_g = 3\text{ mm}$ ,  $L_g = 26\text{ mm}$ .

Vor dem Beginn jeder Messung wurde die Röhre während einer bis mehrerer Stunden „eingebrannt“, d. h. bei eingeschaltetem Heizstrom (der von Zeit zu Zeit nachreguliert wurde) sich selbst überlassen.

Größe und Konstanz des Heizstromes wurden nie direkt, sondern immer nur an der bekanntlich sehr viel empfindlicheren Emission bei einer bestimmten Anoden- und Gitterspannung kontrolliert. Es wurde also für eine bestimmte Messung der Heizstrom immer so reguliert, daß z. B. bei  $V_a = V_g = 160,0\text{ Volt}$  genau  $J_a = 100,0\text{ Skt.}$  war. Eine gleich große Genauigkeit der Einstellung wäre sonst nur durch Messung der Heizspannung mit dem Kompensationsapparat zu erreichen gewesen.

§ 4. Bei Versuchen mit der im vorhergehenden Paragraphen beschriebenen Anordnung wurden nun auffällige zeitliche Änderungen von  $J_a$  und  $J_g$  beobachtet, die im folgenden kurzweg als „Ermüdungs“- und „Erholungserscheinungen“ bezeichnet werden sollen.

Zur Orientierung ist ein typisches Beispiel eines solchen Versuchs in Fig. 4 graphisch wiedergegeben. Im unteren Teil der Figur sind die der Röhre auferlegten Bedingungen:  $V_a$  (ausgezogen),  $V_g$  (gestrichelt),  $H$  (strichpunktirt), im oberen Teil der aus diesen folgende gemessene Verlauf von  $J_a$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  dargestellt. Die plötzlichen Änderungen von  $V_a$ ,  $V_g$  und  $H$  konnten mittels der in der Schal-

tung vorgesehenen Umschalter ohne Zeitverluste ausgeführt werden. Man sieht in Fig. 4, daß die Röhre sich unter gewissen Betriebsbedingungen „ermüdet“, unter anderen wiederum

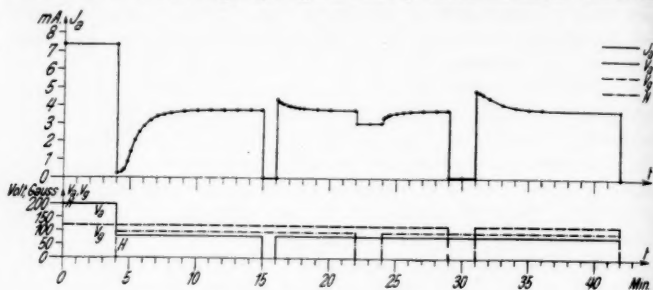


Fig. 4. Ermüdungs- und Erholungsversuch

„erholt“ und daß diese Vorgänge nach etwa 6 Min. jeweils ihren Endzustand erreichen.

In Übereinstimmung damit wurde festgestellt, daß die Intensität der Ermüdung von deren Dauer abhängt. Fig. 5 zeigt eine Schar von Erholungskurven, die sich einzig durch die Dauer der jeweils vorgegangenen Ermüdung unterscheiden.

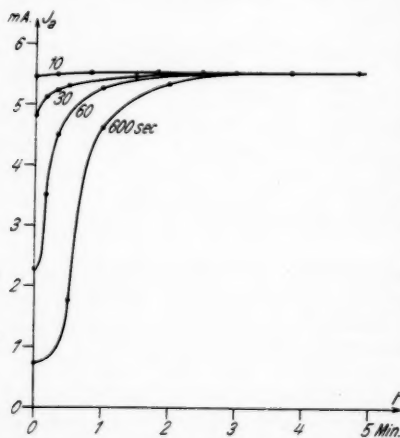


Fig. 5. Erholungskurven bei  $V_a = 80$  Volt,  $V_g = 120$  Volt,  $H = 84$  Gauss. Parameter: Dauer in Sekunden der vorausgegangenen Ermüdung bei  $V_a = 200$  Volt,  $V_g = 120$  Volt,  $H = 84$  Gauss

§ 5. Auffälligerweise konnten beim Magnetfeld  $H = 0$  keine Ermüdungs- und Erholungserscheinungen festgestellt werden. Dagegen zeigte sich jedesmal beim Einschalten des Magnetfeldes, daß die betreffende Veränderung in der Röhre offenbar doch vor sich gegangen war. Dies wurde so untersucht, daß die Röhre bei  $H = 0$  mit bestimmten Werten von  $V_a$  und  $V_g$



betrieben wurde und das Magnetfeld  $H$  nur von Zeit zu Zeit für etwa 3 Sek., d. h. die zur Ablesung von  $J_a$  notwendige Zeit, eingeschaltet wurde. Diese nur momentan, probeweise

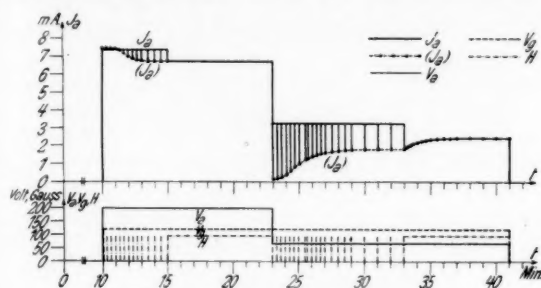


Fig. 6. Ermüdung und Erholung

angelegten Magnetfelder seien, im Gegensatz zu den konstanten Feldern  $H$  im folgenden durch  $(H)$  bezeichnet und die entsprechenden  $J_a$ -Werte in analoger Weise durch  $(J_a)$ .

Fig. 6 gibt in der bereits bekannten Darstellungsweise einen Ausschnitt aus einer solchen Messung. Dieser zeigt einerseits (wie übrigens auch Fig. 4) die vollkommene Konstanz von  $J_a$  bei  $H = 0$ ,

andererseits die trotzdem eintretenden Ermüdungs- und Erholungsvorgänge, wie sie durch die Probefelder  $(H)$  an den entsprechenden  $(J_a)$ -Werten sichtbar werden. Es war somit festgestellt, daß der Ermüdung und Erholung der Röhre ein umkehrbarer Vorgang zugrunde liegt, dessen Eintreten zwar vom Magnetfeld unabhängig ist, dessen Wirkung aber eng mit ihm zusammenhängt.

Die Ermüdung wurde ferner bei verschiedenen Anodenspannungen aber konstanter Gitterspannung  $V_g = 120,0$  Volt untersucht, und zwar wieder mit Hilfe der jeweils kurz an-

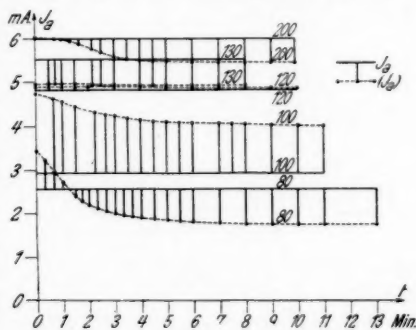


Fig. 7. Ermüdung bei verschiedenen Anodenspannungen.  $V_g = 120$  Volt. Parameter:  $V_a$  in Volt.  $(H) = 103$  Gauss

gelegten Magnetfelder ( $H$ ). Vor jeder Messung war die Röhre ausgeruht, d. h. bei  $V_a = V_g = 0$  mindestens 10 Min. lang sich selbst überlassen worden. Die sich dann ergebenden Kurven für ( $J_a$ ) sind in Fig. 7, nunmehr unter Weglassung der graphischen Darstellung von  $V_a$ ,  $V_g$  und  $H$ , wiedergegeben.

Es fällt auf, daß bei  $V_a = 120,0$  Volt, d. h. bei  $V_a = V_g$  der Ermüdungseffekt nahezu ausbleibt. Dieser Umstand darf jedoch, wie erst der nächstfolgende Versuch dartun wird, nicht in dem Sinne gedeutet werden, daß die Ermüdung in einem wesentlich nur die Sekundärelektronenemission affizierenden Vorgang bestehe.

§ 6. Die Ermüdung der vorher in bekannter Weise ausgeruhten Röhre wurde nun, bei  $V_a = 200$  Volt und  $V_g = 120$  Volt,

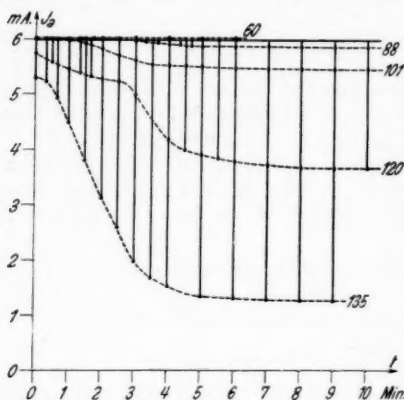


Fig. 8. Ermüdung bei  $V_a = 200$  Volt,  $V_g = 120$  Volt. Parameter: Probefeldstärke ( $H$ ) in Gauss

in Abhängigkeit vom Betrage der magnetischen Probefeldstärke ( $H$ ) untersucht. Wie die Kurven der Fig. 8 zeigen, ergab sich dabei, daß bei Anwendung von ( $H$ ) = 120 Gauss und ( $H$ ) = 135 Gauss der Anodenstrom ( $J_a$ ) weit unter den Betrag des Primärstromes  $i'_a = 5,25$  mA sinkt. Diese Tatsache schließt einen reinen Sekundärelektroneneffekt aus. Vielmehr deutet der ganze Verlauf der Kurven, und insbesondere der die Höhe des Primäranodenstromes aufweisende Buckel in der Kurve für ( $H$ ) = 120 Gauss darauf hin, daß es sich um eine einfache Zunahme des tatsächlich im Innern der Röhre herrschenden Magnetfeldes handelt.

In diesem Sinne muß auch der Verlauf der „unermüdeten“ und der „ermüdeten“ Charakteristik der Fig. 9 gedeutet werden. Ein Vergleich mit der Charakteristikenschar der Fig. 1 ergibt nämlich, daß sich die Verschiedenheit der beiden Kurven B und C leicht verstehen läßt, wenn man annimmt, daß bei der Aufnahme der ermüdeten Charakteristik C die magnetische

Probefeldstärke ( $H$ ) ein wenig größer gewesen sei, als bei Aufnahme der unermüdeten Charakteristik  $B$ .

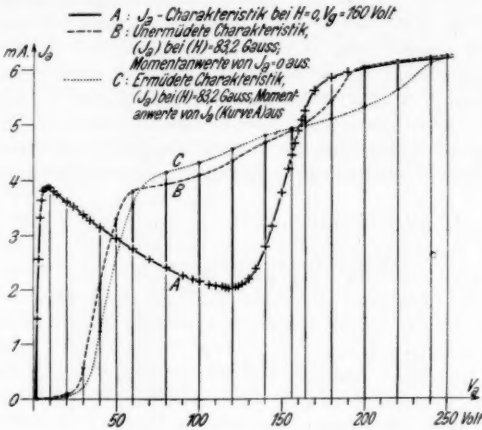


Fig. 9. Charakteristiken

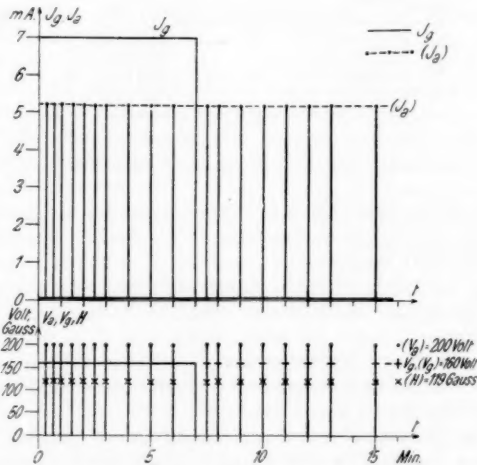


Fig. 10. Keine Ermüdung durch  $J_g$

Es muß also die Ermüdung durch eine Zunahme der im Innern der Röhre tatsächlich wirksamen Magnetfeldstärke hervorgerufen werden.

§ 7. Zur Lokalisierung des Ermüdungsvorganges wurden die in den Figg. 10 und 11 wiederum graphisch dargestellten Versuche ausgeführt. Wie ersichtlich, wurden dabei nicht nur die magnetischen Probefelder ( $H$ ), sondern analog auch Probe-  
werte ( $V_a$ ) bzw. ( $V_g$ ) der Spannungen  $V_a$  und  $V_g$  angewendet, um die Röhre auch bei  $V_a = 0$  bzw.  $V_g = 0$  zu untersuchen.

Fig. 10 zeigt, daß die vorher ausgeruhte Röhre durch den Gitterstrom  $J_g$  allein ( $V_g = 160$  Volt,  $V_a = 0$ ) nicht, oder doch

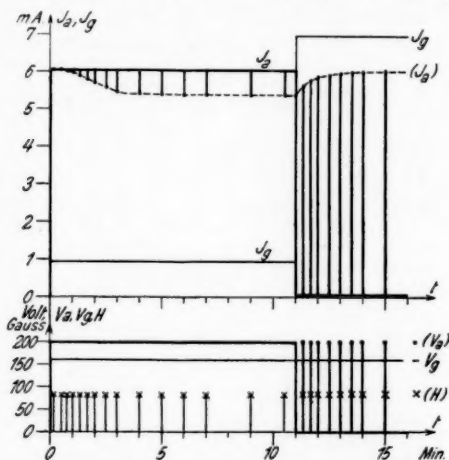


Fig. 11. Ermüdung und bei  $V_a = 0$  Erholung

nur um einen sehr kleinen Betrag, ermüdet wird. Die Kontrolle bei  $V_a = V_g = 0$  bestätigt dies, indem eine merkliche Erholung nicht eintritt.

Fig. 11 zeigt, daß die Röhre sich nach vorausgegangener Ermüdung wieder vollkommen erholt (d. h. den bei  $V_a = V_g = 0$  innegehabten Zustand erreicht), wenn nur  $V_a = 0$  ist, trotzdem alsdann die ganze Emission als  $J_g$  auf das Gitter geht.

Der Ermüdungsvorgang ist somit wesentlich eine Folge des Anodenstromes  $J_a$  allein.

§ 8. Die in den Paragraphen 7 und 8 gemachten Feststellungen lassen für die Ermüdungs- und Erholungserscheinungen nun folgende Erklärung (22) zu.

Der aus Nickelblech hergestellte Anodenzyylinder bewirkt eine gewisse Entmagnetisierung des Feldes im Innern der Anode, so daß die auf die Elektronen tatsächlich wirkende Feldstärke  $H_a$  kleiner ist, als das durch den Strom in der Spule erzeugte Feld  $H$ . Wird dann durch das Elektronenbombardement die Temperatur der Anode erhöht, so sinkt ihre entmagnetisierende Wirkung und steigt infolgedessen das Magnetfeld  $H_a$  im Innern des Anodenzyinders: „Ermüdung“. Bei Abnahme oder Aussetzen des Elektronenbombardements dagegen sinkt die Temperatur der Anode, steigt infolgedessen ihre entmagnetisierende Wirkung und sinkt wiederum das wirksame Feld  $H_a$ : „Erholung“.

Für die unerwartete Größe der durch diese Magnetfeldänderungen auf die Ströme in der Röhre erzeugten Einwirkungen sind zwei Gründe anzuführen: Erstens sind die in der Röhre fließenden Elektronenströme, besonders im Gebiet der Grenzfeldstärke, auf Magnetfeldänderungen außerordentlich empfindlich; zweitens ist bereits infolge der Strahlung des Glühfadens die Temperatur der Nickelanode hoch und deshalb die Temperaturabhängigkeit ihrer Magnetisierung groß. (Auf diesen Punkt wird an Hand der nachfolgenden Versuche noch zurückzukommen sein.)

Nach einer Änderung der Betriebsbedingungen  $V_a$  und  $V_g$  ändert sich die Anodentemperatur so lange, bis wieder Gleichgewicht zwischen der aufgenommenen und der abgestrahlten sekundlichen Energiemenge besteht. Bezeichnet man als Anodentemperatur  $T_a$  einfach die Temperaturdifferenz zwischen der Anode und dem die Röhre umgebenden Raume, so ist die alsdann erreichte stationäre Anodenentemperatur  $T_a$  bestimmt durch die gesamte der Anode innerhalb der Röhre pro Sekunde zugeführte Energie  $Q_a$ . Diese setzt sich in erster Näherung zusammen aus einem durch Temperaturstrahlung übergehenden Bruchteil  $h$  der dem Glühdraht zugeführten Heizenergie  $E_f$ , einem ebenfalls durch Temperaturstrahlung übergehenden Bruchteil  $k$  der dem Gitter durch das Elektronenbombardement zugeführten Energie  $E_g$ , und der aus dem Elektronenbombardement auf der Anode selbst erzeugten Energie  $E'_a$ .

$$Q_a = hE_f + kE_g + E'_a.$$

Bei Versuchen mit konstanter Emission ist der vom Glühfaden stammende Energiebetrag  $hE_f = \text{const.}$ , so daß die Anodentemperatur  $T_a$  allein durch die Elektronenenergien auf Anode und Gitter bestimmt wird, also durch den Betrag

$$E_a = kE_g + E'_a.$$

Auf dem Umwege über die Anodentemperatur  $T_a$  besteht somit eine eindeutige Beziehung zwischen der entmagnetisierenden Wirkung, d. h. der Feldstärkendifferenz  $H - H_a$  einerseits und der Anodenenergie  $E_a$  andererseits.

§ 9. Es müssen sich also Versuche machen lassen, bei denen ein und derselbe durch ein bestimmtes Magnetfeld hervorgerufene Effekt bei verschiedenen äußeren Feldstärken  $H$  auftritt, je nach der der Anode durch das Elektronenbombardement pro Sekunde zugeführten Energie  $E_a$ .

Das Resultat eines solchen Versuches, bei dem allerdings nur der Hauptbestandteil  $E'_a$  der Anodenenergie ermittelt werden konnte<sup>1)</sup>, ist in Fig. 12 wiedergegeben. Die Kurven

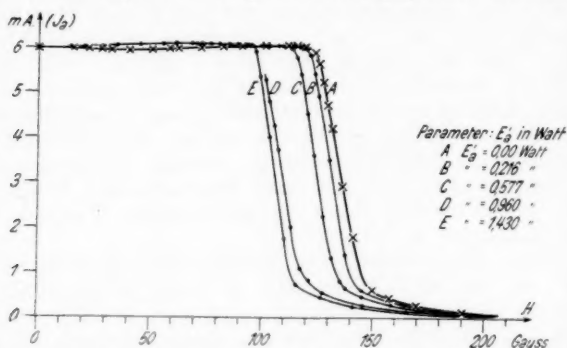


Fig. 12. Magnetcharakteristiken bei steigender Anodentemperatur

zeigen, wie der Steilabfall von  $(J_a)$  mit  $(H)$  sich mit zunehmender Energie  $E'_a$  des Elektronenbombardements nach kleineren Feldstärken  $(H)$  verschiebt. Die Verschiebungen  $\Delta H$  gegenüber der Kurve für  $E'_a = 0$  Watt ergeben direkt die Abnahme der durch den Anodenzylinder bewirkten Entmagnetisierung des Feldes in Gauss.

Die Messungen wurden, z. B. für die Kurve  $E'_a = 0,577$  Watt, folgendermaßen ausgeführt: Es wurde zuerst die Heizung so eingestellt, daß bei  $V_a = V_g = 160,0$  Volt genau  $J_a = 6,00$  mA

1) Da der Koeffizient  $k$  unbekannt war, konnte der Anteil  $k E_g$  nicht angegeben werden. Daß aber  $k$  auf alle Fälle klein, und  $k E_g$  deshalb ohne großen Fehler zu vernachlässigen ist, geht aus dem in Fig. 10 dargestellten Versuch hervor, der trotz der hohen Gitterenergie  $E_g = J_g V_g = 6,95 \cdot 10^{-3} \cdot 160 = 1,11$  Watt nur eine verschwindend kleine Ermüdung ergab. — Bezüglich einer experimentellen Bestimmung von  $k$  muß auf eine demnächst erscheinende Arbeit verwiesen werden.

war. Dann wurde  $V_a = V_g = 100,0$  Volt angelegt, wobei  $J_a = 5,77$  mA betrug und durch allenfalls notwendiges Nachregulieren der Heizung während der ganzen Messung konstant gehalten wurde. Der Anode wurde so während etwa einer halben Stunde die Energie  $E_a' = J_a V = 0,577$  Watt zugeführt<sup>1)</sup>, so daß die entsprechende Endtemperatur sicher erreicht war. Dann erst wurde mit der für alle Kurven in gleicher Weise ausgeführten eigentlichen Messung begonnen: Für jeden Meßpunkt wurde während der zur Ablesung von  $J$  notwendigen Zeit von etwa 3 Sek. gleichzeitig ( $H$ ) und ( $V_g$ ) ( $V_g$ ) = ( $V_g$ ) = 160,0 Volt angelegt und ( $J_a$ ) abgelesen. Die ( $H$ )-Werte wurden schrittweise gesteigert. Zwischen je zwei Ablesungen mußte, mit Rücksicht auf die Konstanz der Anodentemperatur, eine Wartezeit von etwa 3 Min. eingeschaltet werden. Die so erhaltenen ( $J_a$ )-Werte sind durch die Kurven der Fig. 12 dargestellt.

Die Kurve für  $E_a' = 0,960$  Watt ist infolge eines Mißgeschickes bei der Messung nicht vollständig.

Die Kurven der Fig. 12 lassen sich nicht vollständig zur Deckung bringen, sondern zeigen eine mit  $E_a'$  zunehmende Steilheit. Dies hat seinen Grund darin, daß das Feld  $H$  der Spule weitgehend homogen, das entmagnetisierende Feld  $H - H_a$  des Anodenzyllinders dagegen stark inhomogen ist, so daß durch die Abnahme des letzteren eine bessere Annäherung an den Idealfall homogenen Feldes mit unendlich steiler Charakteristik erzielt wird.

§ 10. Es schien nun interessant, durch eine dichte Folge von Kurven wie die in Fig. 12 dargestellten, die Beziehung zwischen der Anodenenergie  $E_a'$  und der entstehenden Verschiebung  $\Delta H$  oder dem kritischen Magnetfeld  $H_k$ <sup>2)</sup> schlechtweg, also die Funktion

$$E_a' = \varphi'(H_k)$$

näher zu ermitteln.

Dies geschah, nachdem die Röhre in einem mit Paraffinöl gefüllten Thermostaten, dessen Temperatur mit einer Genauigkeit von einigen Zehntel Grad auf  $T_0 = 42,0^\circ \text{C}$  gehalten wurde, eingebaut und nachdem die Ablesegenauigkeit für den Strom  $J_M$  in der Magnetfeldspule durch eine Kompensationsanordnung verdoppelt worden war.

1) Hierbei sind die Austrittsenergien der Glühelktroden, Potentialdifferenzen zwischen den Elektroden, sowie der Spannungsabfall am Glühfaden vernachlässigt.

2) Nach Hull diejenige Feldstärke, bei der die Elektronen die Anode nicht mehr erreichen.



Die Messungen, analog den im vorhergehenden Paragraphen beschriebenen, unterscheiden sich von jenen durch folgendes: Die Glühfadenheizung war etwas geringer, so daß bei  $V_a = V = 180,0$  Volt nur  $J_a = 4,620$  mA betrug. Die Meßpunkte wurden bei  $(V_a) = (V_g) = 180,0$  Volt und entsprechendem  $(H)$  gewonnen. Die Kurven wurden nicht ganz durchgemessen, sondern nur durch einige benachbarte Meßpunkte die kritische Feldstärke  $H_k$  bestimmt, bei der  $J_a$  gerade auf  $\frac{1}{5}$  des Anfangswertes, also auf 3,696 mA abgefallen war.

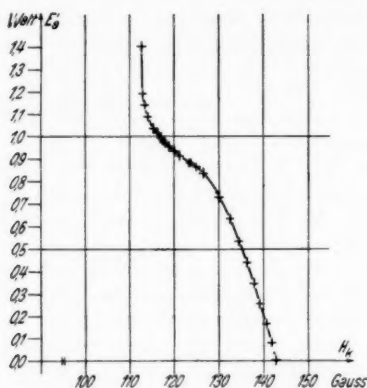


Fig. 13.  $E_a' = \varphi'(H_k)$ ; Verschiebung der kritischen Magnetfeldstärke mit steigender Anodentemperatur

Die so erhaltene Beziehung  $\varphi'$  zwischen den  $H_k$  und den zu den einzelnen Kurven gehörenden Energien  $E_a'$  ist in Fig. 13 dargestellt.

Sie zeigt auffallend, daß für  $E_a' > 1,2$  Watt eine Änderung der kritischen Feldstärke  $H_k$  nicht mehr eintritt, d. h., daß die Anodentemperatur hier den Curiepunkt (etwa  $360^\circ \text{C}$ ) erreicht hat. Ferner nimmt sie, im Vergleich zu der direkt gemessenen Magnetisierungskurve des Nickels, einen merklich „abgerundeten“ Verlauf, was offenbar so zu deuten ist, daß die Temperatur längs des Anodenzylinders nicht gleichmäßig verteilt ist. Vielmehr wird, da ja auch die Glühfadentemperatur in der Mitte am höchsten ist und die Elektronenemission nur von dieser Stelle ausgeht (23), die Temperatur der Anode in der Mitte am höchsten sein und gegen die Enden des Zylinders hin absinken.

Damit ergibt sich etwa folgende Interpretation der vollständigen Kurve: Mit steigender Anodenenergie  $E_a'$  sinkt die außen anzulegende kritische Feldstärke  $H_k$ , entsprechend der Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung, zuerst langsam. Bei etwa  $E_a' = 0,8$  Watt erreicht zuerst die Anodenmitte die Temperatur des Curiepunktes, weshalb  $H_k$  rascher sinkt, um dann schließlich bei  $E_a' = 1,2$  Watt, wo der ganze mittlere Teil, innerhalb dessen die Elektronen laufen, die Temperatur des Curiepunktes erreicht hat, in einen konstanten Wert überzugehen. Dieser letztere Wert  $H_k = 112,8$  Gauss ist die wahre kritische Feldstärke, wie sie in einer unmagnetischen Anode unter sonst gleichen Umständen gefunden würde.

Aus dem bekannten Ausdruck für die kritische Feldstärke

$$H_k = \frac{6,72}{R_a} \cdot \sqrt{V_a}$$

berechnet sich für den vorliegenden Fall ( $R_a = 0,75$  cm,  $V_a = 180,0$  Volt)  $H_k$  zu 120,2 Gauss. Die Übereinstimmung dieses Wertes mit dem experimentell gefundenen von 112,8 Gauss ist befriedigend, weil erstens dem Felde 112,8 Gauss eine Schwächung von  $J_a$  nur auf  $\frac{4}{5}$  des Anfangswertes entspricht und zweitens, wie Fig. 12 zeigt, der ganze Steilabfall von  $J_a$  sowieso ein Intervall von rund 20 Gauss überstreicht.

Die entmagnetisierende Wirkung der Nickelanode hat also bei der untersuchten Röhre und unter den gewählten Versuchsbedingungen eine scheinbare Vergrößerung der kritischen Magnetfeldstärke von 112,8 bis auf 142,8 Gauss, d. h. um rund 24 % des wahren Wertes zur Folge, woraus, in Anbetracht der Häufigkeit von Röhren mit Nickelanoden und der zunehmenden Anwendung von Magnetfeldern, die praktische Bedeutung der Erscheinung erhellt.

Es ist mir ein Bedürfnis, auch an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Edgar Meyer, für das fördernde Interesse, das er der Entwicklung dieser Arbeit stets entgegengebracht hat, meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

#### Literaturverzeichnis

- 1) H. Greinacher, Verh. d. D. phys. Ges. 14. S. 856. 1912; Ztschr. f. Phys. 11. S. 239. 1922.
- 2) A. W. Hull, Phys. Rev. 17. S. 539. 1921; 18. S. 31. 1921.
- 3) F. R. Elder, Proc. Inst. Radio Eng. 13. S. 159. 1925.
- 4) A. Slutzkin u. D. Steinberg, Ukrain. phys. Abh. 1. S. 22, 1927; Ann. d. Phys. [5] 1. S. 658. 1929.

- 5) A. Žaček, *Jahrb. d. drahtl. Telegr.* **32**. S. 172. 1928.
- 6) H. Yagi, *Proc. Inst. Radio Eng.* **16**. S. 715. 1928.
- 7) K. Okabe, *Proc. Inst. Radio Eng.* **18**. S. 1748. 1930.
- 8) J. Ranzi, *Nuovo Cimento* **6**. S. 249. 1929.
- 9) H. E. Hollmann, *Ann. d. Phys.* [5] **8**. S. 956. 1931.
- 10) J. Sahánek, *Phys. Ztschr.* **33**. S. 693. 1932.
- 11) A. Slutzkin u. P. Lejaskow, *Sow. Phys.* **1**. S. 768. 1932.
- 12) H. Collenbusch, *Ann. d. Phys.* [5] **13**. S. 191. 1932.
- 13) M. Rössiger, *Ztschr. f. Phys.* **43**. S. 480. 1927; *Ztschr. f. Instr.* **49**. S. 105. 1929.
- 14) H. Greinacher, *Ztschr. f. Phys.* **11**. S. 239. 1922.
- 15) W. Braunbek, *Ztschr. f. Phys.* **17**. S. 117. 1923.
- 16) H. Lange, *Jahrb. d. drahtl. Telegr.* **26**. S. 38. 1925.
- 17) M. Forró, *Ann. d. Phys.* [5] **1**. S. 513. 1929.
- 18) F. Tank u. E. Schiltknecht, *Helv. Phys. Acta* **1**. S. 110, 1928.
- 19) J. Völker, *Diss. Jena*. 1929.
- 20) Vgl. hierzu etwa: B. van der Pol, *Jahrb. d. drahtl. Telegr.* **25**. S. 121. 1925.
- 21) H. Lange, *Jahrb. d. drahtl. Telegr.* **26**. S. 38. 1925.
- 22) Vgl. die vorläufige Mitteilung: H. A. Schwarzenbach, *Helv. Phys. Acta* **3**. S. 446. 1930.
- 23) Vgl. etwa H. Lange, *Jahrb. d. drahtl. Telegr.* **31**. S. 139. 1928.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 7. April 1933)

Fock.

eben  
sich  
such  
schei  
Som  
V. F  
magn  
Integ  
wurd  
Funkt  
ist v  
ist a  
merl  
die  
tate  
dene  
möch  
wied

draht

phys  
Wee  
S. 35

Wel  
Pol  
Proc  
Hoch  
Soc.

gene  
wo

**Zur Berechnung  
des elektromagnetischen Wechselstromfeldes  
bei ebener Begrenzung  
Von V. Fock**

Für die Berechnung des elektromagnetischen Feldes bei ebener Begrenzung (drahtlose Telegraphie, Erdströme) bietet sich von selbst die Methode der Integraldarstellung der gesuchten Lösung in Form eines Fourierintegrals mit Besselschen Funktionen dar. Diese Methode wurde besonders von Sommerfeld erfolgreich angewandt.<sup>1)</sup> In einer Arbeit von V. Fock und V. Bursian<sup>2)</sup> hat die Bestimmung des elektromagnetischen Feldes einer geerdeten Wechselstromkette auf Integrale vom Sommerfeldschen Typus geführt, und dieselben wurden für die Erdoberfläche durch Produkte Besselscher Funktionen erster und dritter Art ausgedrückt. Diese Arbeit ist vor etwa 7 Jahren erschienen (in russischer Sprache); sie ist aber, wie es scheint, in wissenschaftlichen Kreisen unbemerkt geblieben, denn auch in den neueren Arbeiten<sup>3)</sup> wird die dort gegebene Methode nicht angewandt.<sup>4)</sup> Da die Resultate jener Arbeit für die Diskussion der Lösungen verschiedener Probleme der betrachteten Art von Nutzen sein können, möchten wir sie im folgenden in etwas erweiterter Form wiedergeben.

1) A. Sommerfeld, Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie, Ann. d. Phys. 28. S. 665. 1909; 81. S. 1135. 1926.

2) V. Fock (mathematischer Teil) und V. Bursian (einleitender physikalischer Teil). Das elektromagnetische Feld einer geerdeten Wechselstromkette (russisch), Journ. d. russ. phys.-chem. Ges., phys. Teil 58. S. 356. 1926 (Chwolson-Heft).

3) A. Sommerfeld, Elektromagnetische Schwingungen, Riemann-Weber, Bd. II. 1927; Fr. Ollendorff, Erdströme, 1930; Balth. v. d. Pol u. K. F. Niessen, Ann. d. Phys. [5] 6. S. 273. 1930; L. H. Thomas, Proc. Cambr. Phil. Soc. 26. S. 123. 1930; Balth. v. d. Pol, Ztschr. f. Hochfrequenztechn. 37. S. 152. 1931; F. H. Murray, Proc. Cambr. Phil. Soc. 28. S. 433. 1932; K. F. Niessen, Ann. d. Phys. [5] 16. S. 810. 1933.

4) Vgl. jedoch D. Sehermann, Das elektromagnetische Feld eines geneigten Rahmens (russisch), Journ. f. exp. u. theor. Phys. 2. S. 129. 1932, wo die Resultate der unter 2) zitierten Arbeit eine Anwendung finden.

## I. Formulierung des Problems

Wir betrachten ein unendlich dünnes Kabel von beliebiger Form, welches auf der als eben angenommenen Erdoberfläche liegt und an beiden Enden geerdet ist. Die im Kabel wirkende elektromotorische Kraft erzeugt in ihm einen Strom von der (gegebenen) Stärke  $q$ . Die beiden durch die unendliche Ebene (Erdoberfläche) getrennten Halbräume (der obere Halbraum: die Luft, und der untere Halbraum: die Erde) werden als vollständig homogen angenommen. Gesucht wird das elektromagnetische Feld im ganzen Raum.

Um die Lösung des Problems aufzustellen, betrachten wir die singulären Punkte und die singulären Linien des elektromagnetischen Feldes. Die singulären Punkte sind die Elektroden (die Stellen, wo das Kabel geerdet ist). In deren Nähe muß das elektrische Feld unendlich werden, derart, daß das über die Oberfläche einer unendlich kleinen, um die Elektrode geschlagenen Kugel genommene Integral

$$(1) \quad \iint \left( \sigma \mathfrak{E}_n + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}_n}{\partial t} \right) dS = \pm q$$

gleich der gesamten Stromstärke  $q$  wird (für die eine Elektrode mit positivem, für die andere mit negativem Vorzeichen genommen). Hier bezeichnet  $\sigma \mathfrak{E}_n$  die Stromdichte des Leitungsstromes und  $\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}_n}{\partial t}$  die des Verschiebungsstromes. Aus Gl. (1) folgt, daß in der Nähe der Elektrode das elektrische Feld von der Ordnung  $1/r^2$  unendlich wird, wo  $r$  den Abstand des Aufpunktes von der Elektrode bezeichnet.

Ferner bildet auch das Kabel eine singuläre Linie. In dessen Nähe wird das magnetische Feld unendlich, und zwar derart, daß das über eine unendlich kleine geschlossene Kurve um das Kabel genommene Integral

$$(2) \quad \int \mathfrak{H}_s ds = \frac{4\pi}{c} q$$

gleich der mit  $4\pi/c$  multiplizierten Stromstärke wird. Daraus folgt, daß das magnetische Feld in der Nähe des Kabels wie  $1/r$  unendlich wird, wo  $r$  den Abstand des Aufpunktes vom Kabel bezeichnet.

Wir wenden uns nun den Maxwell'schen Gleichungen zu:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathfrak{H}, & \text{div } \mu \mathfrak{H} = 0, \\ -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathfrak{E}, & \text{div } \varepsilon \mathfrak{E} = 0. \end{cases}$$

Die auf den unteren Halbraum (die Erde) bezüglichen Größen bezeichnen wir mit ungestrichenen, die auf den oberen Halb-

raum (die Luft) bezüglich mit gestrichenen Buchstaben. Für die Luft wird  $\sigma' = 0$ ; wir wollen aber, um Konvergenzschwierigkeiten zu vermeiden, zunächst  $\sigma' > 0$  annehmen und erst im Endresultat  $\sigma' = 0$  setzen. Außerdem wollen wir die Permeabilität der Erde gleich derjenigen der Luft (und zwar gleich Eins) annehmen. Da wir eine periodische Lösung suchen, setzen wir

$$(4) \quad q = q_0 e^{-i\omega t}; \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{-i\omega t}; \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 e^{-i\omega t}.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(5) \quad \frac{4\pi\sigma}{c} - i\frac{\omega\epsilon}{c} = l; \quad -\frac{i\omega\mu l}{c} = -\frac{\omega^2\epsilon\mu}{c^2} - i\frac{4\pi\sigma\omega\mu}{c^2} = k^2$$

und setzen den reellen Teil von  $k$  als positiv voraus

$$(6) \quad \Re k > 0.$$

Wegen der Annahme  $\sigma > 0$  ist hier das Gleichheitszeichen ausgeschlossen. Die soeben eingeführte Größe  $k$  hängt mit der gewöhnlich<sup>1)</sup> gebrauchten Größe  $k_0$  durch die Beziehung  $k_0 = ik$  zusammen; der Gebrauch von  $k$  statt  $k_0$  bietet gewisse Vorteile, da man alle Rechnungen so durchführen kann, als ob  $k$  reell und positiv wäre. Da wir  $\mu = \mu'$  annehmen, wird

$$(7) \quad \frac{k^2}{l} = \frac{k'^2}{l'}.$$

Nach Abspaltung des Zeitfaktors bekommt man aus den Maxwell'schen Gleichungen:

$$(8) \quad \begin{cases} l\mathfrak{E}_0 = \text{rot } \mathfrak{H}_0, & \text{div } \mathfrak{H}_0 = 0, \\ -k^2\mathfrak{H}_0 = l \text{ rot } \mathfrak{E}_0, & \text{div } \mathfrak{E}_0 = 0. \end{cases}$$

Die Gl. (1) und (2), welche die Singularitäten des Feldes definieren, nehmen jetzt die Form an:

$$(9) \quad \iint l\mathfrak{E}_{0n} dS = \pm \frac{4\pi}{c} q_0,$$

$$(10) \quad \int \mathfrak{H}_{0s} ds = \frac{4\pi}{c} q_0.$$

Auf der Erdoberfläche (die wir mit der  $xy$ -Ebene zusammenfallen lassen, während die  $z$ -Achse senkrecht nach oben gerichtet ist), lauten die Grenzbedingungen

$$(11) \quad \mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_0'; \quad \mathfrak{E}_{0x} = \mathfrak{E}_{0x}'; \quad \mathfrak{E}_{0y} = \mathfrak{E}_{0y}'; \quad l\mathfrak{E}_{0z} = l'\mathfrak{E}_{0z}'.$$

Wir führen einen Vektor  $\mathfrak{U}$  ein, dessen Komponenten die Gleichung

$$(12) \quad \Delta \mathfrak{U} - k^2 \mathfrak{U} = 0$$

1) Vgl. A. Sommerfelds Riemann-Weber-Artikel.

im unteren Medium und eine analoge Gleichung in der Luft erfüllen. Durch den Ansatz

$$(13) \quad \xi_0 = \text{rot } \mathfrak{A}; \quad l\mathfrak{G}_0 = \text{grad div } \mathfrak{A} - k^2 \mathfrak{A}$$

werden die Maxwell'schen Gl. (8) identisch erfüllt. Fordert man ferner, daß auf der Erdoberfläche

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{A}'_z}{\partial z}; \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{A}'_y}{\partial z} \\ \frac{1}{k^2} \text{div } \mathfrak{A} = \frac{1}{k'^2} \text{div } \mathfrak{A}' \end{array} \right.$$

wird, so sind auch die Grenzbedingungen (11) erfüllt.

Wir müssen noch dafür sorgen, daß die Lösung die richtigen Singularitäten besitzt. Setzen wir

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathfrak{A} = \frac{2q_0 k^2}{c(k^2 + k'^2)} \left( \frac{e^{-k r_1}}{r_1} - \frac{e^{-k r_2}}{r_2} \right) + \varphi \\ \text{div } \mathfrak{A}' = \frac{2q_0 k'^2}{c(k^2 + k'^2)} \left( \frac{e^{-k' r_1}}{r_1} - \frac{e^{-k' r_2}}{r_2} \right) + \varphi', \end{array} \right. \quad (17)$$

wo  $r_1$  bzw.  $r_2$  den Abstand der ersten, bzw. der zweiten Elektrode vom Aufpunkt bezeichnet, so wird die Bedingung (9) befriedigt, falls  $\varphi$  und  $\varphi'$  überall endlich bleiben.

Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{C}$  die Differenz

$$(16) \quad \mathfrak{A} - \frac{q_0}{c} \int_{(1)}^{(2)} \frac{d\mathfrak{s}}{r} = \mathfrak{C},$$

wo das Linienintegral längs des Kabels von der ersten Elektrode zur zweiten genommen ist;  $d\mathfrak{s}$  bezeichnet das vektorielle Linienelement und  $r$  den Abstand von  $d\mathfrak{s}$  vom Aufpunkt. Fordern wir, daß der Vektor  $\mathfrak{C}$  samt seinen ersten Ableitungen bei der Annäherung an das Kabel (mit eventueller Ausnahme der Endpunkte) endlich bleibt, so wird auch der Bedingung (10) Genüge getan.

Die Bedingungen (14), (15) und (16) sind nicht alle voneinander unabhängig; außerdem sind sie nicht notwendig, sondern nur hinreichend für die Erfüllung von (9), (10) und (11).

Es läßt sich zeigen<sup>1)</sup>, daß der Vektor  $\mathfrak{A}$  und folglich auch das elektromagnetische Feld durch unsere Bedingungen eindeutig festgelegt werden.

1) A. Sommerfeld, Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie, Ann. d. Phys. 28. S. 665. 1909.



## 2. Lösung durch bestimmte Integrale

Wir gehen nun zur Bestimmung des Vektors  $\mathfrak{A}$  über, und zwar befassen wir uns zunächst mit den horizontalen Komponenten  $\mathfrak{A}_x$  und  $\mathfrak{A}_y$ . Wir konstruieren mit Sommerfeld eine Lösung  $\Pi(\varrho, z)$  ( $\varrho = (\sqrt{x^2 + y^2})$ ) der Wellengleichung, welche mit ihrer Normalableitung an der Erdoberfläche stetig ist und im Koordinatenursprung wie  $1/r$  unendlich wird. Den Wert dieser Funktion im unteren Medium (Erde) bezeichnen wir mit  $\Pi$ , den im oberen Medium (Luft) mit  $\Pi'$ . Die gesuchte Funktion genügt also den folgenden Gleichungen

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \Pi - k^2 \Pi = 0 & \text{für } z < 0 \\ \Delta \Pi' - k'^2 \Pi' = 0 & \text{für } z > 0 \\ \Pi(\varrho, z) - \frac{e^{-k\sqrt{\varrho^2 + z^2}}}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}} = \text{überall endliche Funktion} \\ \Pi'(\varrho, z) - \frac{e^{-k'\sqrt{\varrho^2 + z^2}}}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}} = \text{überall endliche Funktion} \\ \Pi(\varrho, 0) = \Pi'(\varrho, 0) \\ \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial z}\right)_{z=0} \end{array} \right.$$

und wird durch diese Gleichungen eindeutig bestimmt. Suchen wir  $\Pi$  in Form eines bestimmten Integrals mit der Besselschen Funktion  $J_0(\lambda \varrho)$ , so finden wir dafür den Sommerfeldschen Ausdruck

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi(\varrho, z) = \int_0^\infty \frac{2 J_0(\lambda \varrho) e^{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \cdot z}}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} + \sqrt{\lambda^2 + k'^2}} \lambda d\lambda = \frac{e^{-k\sqrt{\varrho^2 + z^2}}}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}} + \\ + (k^2 - k'^2) \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda \varrho) e^{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \cdot z}}{(\sqrt{\lambda^2 + k^2} + \sqrt{\lambda^2 + k'^2})^2} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}}. \end{array} \right.$$

Dieser Ausdruck gilt für  $z < 0$ . Der für  $z > 0$  gültige Ausdruck für  $\Pi'(\varrho, z)$  entsteht aus (18), wenn man dort  $k$  mit  $k'$  vertauscht und  $z$  durch  $-z$  ersetzt. Die Quadratwurzeln sind überall mit positivem reellem Teil zu nehmen.

Die horizontalen Komponenten des Vektorpotentials  $\mathfrak{A}$  lassen sich nun mit Hilfe von  $\Pi$  ausdrücken. Die parametrischen Gleichungen der Kurve (singulären Linie), welche das Kabel darstellt, seien

$$(19) \quad x = \xi(s); \quad y = \eta(s); \quad z = 0; \quad (s_1 \leq s \leq s_2).$$

Wir können dann setzen (für  $z < 0$ ):

$$(20) \quad \begin{cases} \mathfrak{U}_x = \frac{q_0}{c} \int_{s_1}^{s_2} \Pi(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}; z) \xi'(s) ds, \\ \mathfrak{U}_y = \frac{q_0}{c} \int_{s_1}^{s_2} \Pi(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}; z) \eta'(s) ds \end{cases}$$

und analog für  $z > 0$ . In der Tat werden durch diesen Ansatz die Bedingungen (14) und (16) befriedigt, wenn man annimmt, daß  $\mathfrak{U}_z$  keine Singularitäten auf der Kurve hat.

Zur Bestimmung der vertikalen Komponente  $\mathfrak{U}_z$  müssen wir außer der Stetigkeitsforderung  $\mathfrak{U}_z = \mathfrak{U}_z'$  für  $z = 0$  auch die letzte Gl. (14) heranziehen. Dieselbe ergibt, da  $\mathfrak{U}_x$  und  $\mathfrak{U}_y$  stetig sind

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial z} - \frac{1}{k'^2} \frac{\partial \mathfrak{U}_x'}{\partial z} = \left( \frac{1}{k'^2} - \frac{1}{k^2} \right) \left( \frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{U}_y}{\partial y} \right) \text{ für } z=0.$$

Wir berechnen den Ausdruck rechts:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{U}_y}{\partial y} &= \frac{q_0}{c} \int_{(1)}^{(2)} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x} d\xi + \frac{\partial \Pi}{\partial y} d\eta \right) \\ &= - \frac{q_0}{c} \int_{(1)}^{(2)} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} d\eta \right), \end{aligned}$$

folglich

$$(21) \quad \frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{U}_y}{\partial y} = \frac{q_0}{c} [\Pi(\varrho_1, z) - \Pi(\varrho_2, z)],$$

wo  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  die horizontalen Abstände des Aufpunktes von den beiden Elektroden sind. Die Bedingungen für  $\mathfrak{U}_z$  an der Erdoberfläche lauten also

$$(22a) \quad k'^2 \frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial z} - k^2 \frac{\partial \mathfrak{U}_x'}{\partial z} = \frac{q_0}{c} (k^2 - k'^2) [\Pi(\varrho_1, 0) - \Pi(\varrho_2, 0)],$$

$$(22b) \quad \mathfrak{U}_z = \mathfrak{U}_z'.$$

Setzen wir nun

$$(23) \quad \mathfrak{U}_z = \frac{q_0}{c} [F(\varrho_1, z) - F(\varrho_2, z)]$$

und unterwerfen wir  $F(\varrho, z)$  der Wellengleichung (12) und den Grenzbedingungen

$$(24) \quad \begin{cases} F = F' \\ k'^2 \frac{\partial F}{\partial z} - k^2 \frac{\partial F'}{\partial z} = (k^2 - k'^2) \Pi(\varrho, 0), \end{cases}$$

so werden die Gl. (22) für  $\mathfrak{A}_z$  befriedigt. Die Funktion  $F(\varrho, z)$  bestimmt sich (für  $z < 0$ ) zu

$$(25) \quad F(\varrho, z) = \int_0^{\infty} \frac{2(k^2 - k'^2) J_0(\lambda \varrho) e^{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \cdot z} \lambda d\lambda}{(\sqrt{\lambda^2 + k^2} + \sqrt{\lambda^2 + k'^2}) (k^2 \sqrt{\lambda^2 + k'^2} + k'^2 \sqrt{\lambda^2 + k^2})}.$$

Für  $z > 0$  gilt ein analog gebauter Ausdruck [er entsteht aus (25), wenn man dort  $e^{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \cdot z}$  durch  $e^{-\sqrt{\lambda^2 + k'^2} \cdot z}$  ersetzt].

Aus (21) und (23) folgt, daß  $\text{div } \mathfrak{A}$  in der Form

$$(26) \quad \text{div } \mathfrak{A} = \frac{q_0}{c} [\Phi(\varrho_1, z) - \Phi(\varrho_2, z)]$$

dargestellt werden kann, wo  $\Phi(\varrho, z)$  die Bedeutung

$$(27) \quad \Phi(\varrho, z) = \Pi(\varrho, z) + \frac{\partial F}{\partial z}$$

hat. Aus (18) und (25) folgt für  $\Phi$  die Integraldarstellung

$$(28) \quad \Phi(\varrho, z) = \int_0^{\infty} \frac{2k^2 J_0(\lambda \varrho) e^{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \cdot z}}{k^2 \sqrt{\lambda^2 + k'^2} + k'^2 \sqrt{\lambda^2 + k^2}} \lambda d\lambda.$$

Der entsprechende für  $z > 0$  gültige Ausdruck folgt aus (28) durch Vertauschung von  $k$  mit  $k'$  und  $z$  mit  $-z$ . Die Funktion  $\Phi(\varrho, z)$  läßt sich in der Form

$$(29) \quad \begin{cases} \Phi(\varrho, z) = \frac{2k^2}{k^2 + k'^2} \frac{e^{-kr}}{r} + \Phi_0(\varrho, z) & (z < 0), \\ \Phi'(\varrho, z) = \frac{2k'^2}{k^2 + k'^2} \frac{e^{-k'r}}{r} + \Phi'_0(\varrho, z) & (z > 0) \end{cases}$$

darstellen, wo  $\Phi_0$  und  $\Phi'_0$  überall endliche Funktionen sind. Dabei gilt

$$(30) \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = \frac{k^4}{k^2 + k'^2} F(\varrho, z); \quad \frac{\partial \Phi'_0}{\partial z} = \frac{k'^4}{k^2 + k'^2} F'(\varrho, z).$$

Aus (26) und (29) erkennt man, daß  $\text{div } \mathfrak{A}$  die richtige Singularität besitzt, so daß die Bedingungen (15) bereits in den übrigen Bedingungen enthalten sind.

Durch die Formeln (18), (20), (25) und (23) wird für das betrachtete Problem das elektromagnetische Feld vollständig bestimmt.

### 3. Berechnung der bestimmten Integrale

Die in der Lösung unseres Problems auftretenden bestimmten Integrale kommen auch in zahlreichen anderen Problemen vor, man kann sagen, in allen Problemen, wo man

mit der Berechnung des Feldes in zwei durch eine unendliche Ebene getrennten Halbräumen zu tun hat. So führen z. B. die im Kapitel über drahtlose Telegraphie des Artikels von Sommerfeld über elektromagnetische Schwingungen<sup>1)</sup> behandelten Fälle (elektrische und magnetische Horizontal- und Vertikalantenne) auf Integrale derselben Form. Jeder Beitrag zur numerischen Beherrschung dieser Integrale dürfte daher erwünscht sein.

Für große numerische Entfernungen (Wellenzone) kann eine allgemeine Diskussion der Integrale am besten nach einem von Weyl<sup>2)</sup> angegebenen Verfahren (Zerlegung in ebene Wellen) durchgeführt werden. Wir wollen jedoch auf den allgemeinen Fall nicht eingehen, sondern beschränken uns auf zwei wichtige Spezialfälle, nämlich erstens den Fall  $z = 0$  (das Feld an der Erdoberfläche) und zweitens den quasi-stationären Fall

$$k' = 0; \quad k = |k| \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

In diesen Fällen gelingt es, die Integrale weitgehend zu vereinfachen und zum Teil in endlicher Form durch bekannte Funktionen auszudrücken.

#### A. Das Feld an der Erdoberfläche

Die Kenntnis des Feldes für  $z = 0$  ist von besonderer Wichtigkeit, da unter gewöhnlichen Umständen die Messung des Feldes gerade auf der Erdoberfläche geschieht. Außerdem kann man, wenn eine Wellenfunktion sowie deren Normalableitung für  $z = 0$  bekannt sind, die höheren Ableitungen mit Hilfe der Wellengleichung berechnen und die Wellenfunktion in das Gebiet  $z > 0$  oder  $z < 0$  analytisch fortsetzen. Auf diese Weise bekommt man eine nach Potenzen von  $z$  fortschreitende Taylorsche Entwicklung, welche für Höhen bzw. Tiefen, die im Verhältnis zur Wellenlänge und zum Abstand von den singulären Punkten klein sind, für numerische Zwecke brauchbar ist.

Wir setzen also  $z = 0$ . Alle Integrale, die in unseren Formeln auftreten, lassen sich dann durch das folgende bestimmte Integral ausdrücken

$$(31) \quad L_\nu = \int_0^\infty J_0(\lambda \varrho) \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2} - \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} + \sqrt{\lambda^2 + k'^2}} \right)^\nu \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}$$

1) Riemann-Weber, Bd. II, Vieweg, 1927.

2) H. Weyl, Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter, Ann. d. Physik. [4] 60. S. 481. 1919.

und zwar entweder in endlicher Form oder in Form von Reihen, die sich aber dann wieder summieren lassen. Wir wollen nun beweisen, daß unter der Voraussetzung

$$(32) \quad \Re(k) > \Re(k') \geq 0$$

die folgende Formel gilt

$$(33) \quad L_\nu = I_\nu \left( \varrho \frac{k - k'}{2} \right) K_\nu \left( \frac{k + k'}{2} \right).$$

Hier bezeichnen  $I_\nu(x)$  und  $K_\nu(x)$  Besselsche Funktionen vom imaginären Argument, die man durch die Gleichungen

$$(34) \quad I_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \cosh xt (1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dt.$$

$$(35) \quad K_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-xt} (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt.$$

definieren kann. Wir benutzen hier die Bezeichnungen von Watson<sup>1)</sup>; mit den sonst gebräuchlichen Besselschen und Hankelschen Funktionen hängen  $I_\nu$  und  $K_\nu$  wie folgt zusammen:

$$(36) \quad \begin{cases} I_\nu(x) = e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} J_\nu(ix) \\ K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} e^{\frac{1}{2}(\nu+1)\pi i} H_\nu^{(1)}(ix). \end{cases}$$

Zum Beweis der Formel (33) benötigen wir der bei Watson a. a. O. S. 434 angegebenen Formel<sup>2)</sup>

$$(37) \quad M_\nu = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda \varrho) \lambda d\lambda}{(\lambda^2 + x^2)^{\nu+1}} = \frac{\varrho^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \frac{K_\nu(x\varrho)}{x^\nu}$$

sowie des für  $\Re(a) > \Re(b)$  gültigen Additionstheorems der Besselschen Funktionen (Watson, S. 365)

1) G. N. Watson, Theory of Bessel Functions. Cambridge, 1922.

2) Diese Formel läßt sich am einfachsten beweisen, wenn man die Differentialgleichung für  $M_\nu$  als Funktion von  $\varrho$  aufstellt.

$$(38) \left\{ \begin{aligned} \frac{K_\nu(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta})}{(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta})^\nu} = \\ = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (\nu + m) \frac{K_{\nu+m}(a)}{a^\nu} \cdot \frac{I_{\nu+m}(b)}{b^\nu} C_m^\nu(\cos \vartheta), \end{aligned} \right.$$

wo die Polynome  $C_m^\nu(\cos \vartheta)$  durch die Gleichung

$$(39) \quad (1 - 2\alpha \cos \vartheta + \alpha^2)^{-\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m C_m^\nu(\cos \vartheta)$$

definiert sind. Diese Polynome genügen der Orthogonalitätsrelation

$$(40) \quad \int_0^\pi \sin^{2\nu} \vartheta C_m^\nu(\cos \vartheta) C_n^\nu(\cos \vartheta) d\vartheta = \frac{\pi \Gamma(2\nu + n)}{2^{2\nu-1} (\nu + n) n! \Gamma^2(\nu)} \delta_{mn},$$

welche in Verbindung mit (38) zur Formel

$$(41) \left\{ \begin{aligned} \int_0^\pi \frac{K_\nu(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta})}{(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta})^\nu} C_n^\nu(\cos \vartheta) \sin^{2\nu} \vartheta d\vartheta = \\ = \frac{\pi}{2^{\nu-1}} \frac{\Gamma(2\nu + n)}{n! \Gamma(\nu)} \frac{K_{\nu+n}(a)}{a^\nu} \frac{I_{\nu+n}(b)}{b^\nu} \end{aligned} \right.$$

führt. Speziell für  $n = 0$  haben wir  $C_0^\nu = 1$  und

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\pi \frac{K_\nu(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta})}{(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta})^\nu} \sin^{2\nu} \vartheta d\vartheta = \\ = \sqrt{\pi} 2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{K_\nu(a)}{a^\nu} \frac{I_\nu(b)}{b^\nu}. \end{aligned} \right.$$

Um die Formel (33) zu beweisen, setzen wir in (37):

$$(43) \quad x^2 = k^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + k'^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2},$$

multiplizieren beide Seiten mit  $\sin^{2\nu} \vartheta d\vartheta$  und integrieren nach  $\vartheta$  von 0 bis  $\pi$ . Wir erhalten eine Gleichung von der Form:

$$(44) \quad \int_0^\pi M_\nu \sin^{2\nu} \vartheta d\vartheta = \int_0^\pi J_0(\lambda \varrho) A \cdot \lambda d\lambda,$$

wo vorübergehend

$$(45) \quad A = \int_0^\pi \frac{\sin^{2\nu} \vartheta d\vartheta}{\left(\lambda^2 + k^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + k'^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}\right)^{\nu+1}}$$

gesetzt ist. Setzt man zur Abkürzung

$$(46) \quad \alpha = \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2} - \sqrt{\lambda'^2 + k'^2}}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} + \sqrt{\lambda'^2 + k'^2}}; \quad |\alpha| < 1,$$

so wird

$$(47) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha} \right) = \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2}}{\sqrt{k^2 - k'^2}} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha} \right) = \frac{\sqrt{\lambda'^2 + k'^2}}{\sqrt{k^2 - k'^2}} \end{cases}$$

und das Integral  $A$  läßt sich schreiben:

$$A = \left( \frac{4\alpha}{k^2 - k'^2} \right)^{\nu+1} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin^{2\nu} \vartheta d\vartheta}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \vartheta)^{\nu+1}}.$$

Mit Hilfe der Substitution

$$\cos \vartheta = x = \alpha(1 - t^2) + t\sqrt{1 - \alpha^2(1 - t^2)}$$

$$\frac{1 - x^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha x} = 1 - t^2$$

$$\frac{dx}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha x)^{1/2}} = \frac{1}{1 - \alpha^2} \left( 1 + \frac{\alpha t}{\sqrt{1 - \alpha^2(1 - t^2)}} \right) dt$$

läßt sich das Integral  $A$  vereinfachen:

$$A = \left( \frac{4\alpha}{k^2 - k'^2} \right)^{\nu+1} \cdot \frac{1}{1 - \alpha^2} \int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dt$$

und wegen

$$\frac{4\alpha}{k^2 - k'^2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda'^2 + k'^2}}$$

bekommt man schließlich

$$(48) \quad A = \left( \frac{4}{k^2 - k'^2} \right)^{\nu} \cdot \frac{\alpha^{\nu}}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda'^2 + k'^2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu + 1)}.$$

Führt man diesen Wert von  $A$  in (44) ein, so bekommt man, mit den Bezeichnungen (31), (46) und (37):

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} L_{\nu} &= \int_0^{\infty} J_0(\lambda \varrho) \alpha^{\nu} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda'^2 + k'^2}} \\ &= \left( \frac{k^2 - k'^2}{4} \right)^{\nu} \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} M_{\nu} \sin^{2\nu} \vartheta d\vartheta, \end{aligned} \right.$$

oder, wenn man für  $M_\nu$  die rechte Seite von (37) einträgt:

$$(50) \quad L_\nu = \frac{\left(\varrho \frac{k^2 - k'^2}{8}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \frac{K_\nu(x\varrho)}{x^\nu} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta.$$

Das Integral rechts läßt sich mit Hilfe von (42) auswerten, wenn man dort

$$(51) \quad a = \varrho \frac{k + k'}{2}; \quad b = \varrho \frac{k - k'}{2}$$

setzt, und man bekommt die zu beweisende Formel<sup>1)</sup>

$$(52) \quad L_\nu = \int_0^\infty J_0(\lambda \varrho) \alpha^\nu \frac{\lambda \, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}} = I_\nu \left(\varrho \frac{k - k'}{2}\right) K_\nu \left(\varrho \frac{k + k'}{2}\right).$$

Diese Formel gilt, unter der Voraussetzung (32), für alle Werte von  $\nu$ , für welche das Integral konvergiert, also für  $\nu$  mit  $\Re(\nu) > -\frac{3}{4}$ . Wir werden sie aber nur für ganz- oder halbzählige  $\nu$  zu benutzen haben.

Wir wollen nun die gewonnene Formel anwenden, um unsere Integrale, für  $z = 0$ , auszuwerten. Wir betrachten zunächst das Integral  $\Pi$ , Gl. (18). Wir schreiben  $\Pi$  in der Form:

$$(53) \quad \Pi(\varrho, 0) = \int_0^\infty J_0(\lambda \varrho) \varphi \frac{\lambda \, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}},$$

wo

$$(54) \quad \varphi = \frac{2 \sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} + \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}$$

gesetzt ist. Drücken wir  $\varphi$  durch  $\alpha$  [Gl. (44)] aus

$$(55) \quad \varphi = \sum_\nu \varphi_\nu \alpha^\nu,$$

so wird

$$(56) \quad \Pi(\varrho, 0) = \sum_\nu \varphi_\nu I_\nu \left(\varrho \frac{k - k'}{2}\right) K_\nu \left(\varrho \frac{k + k'}{2}\right).$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$(57) \quad \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - k'^2} \left( \alpha^{-\frac{1}{2}} - \alpha^{\frac{3}{2}} \right),$$

1) V. Fock u. V. Bursian, a. a. O. Gl. (20).



so daß in diesem Falle die Summe (55) endlich ist, und wir bekommen

$$(58) \quad \Pi(\varrho, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - k'^2} \left( I_{-\frac{1}{2}} K_{-\frac{1}{2}} - I_{\frac{3}{2}} K_{\frac{3}{2}} \right),$$

wo die Argumente der Besselschen Funktionen hinzuzudenken sind. Drückt man hier die Besselschen Funktionen durch die exponentielle Funktion aus, so bekommt man die einfache Formel<sup>1)</sup>:

$$(59) \quad \Pi(\varrho, 0) = \frac{2}{k^2 - k'^2} \cdot \frac{1}{\varrho^3} \left\{ (1 + k' \varrho) e^{-k' \varrho} - (1 + k \varrho) e^{-k \varrho} \right\}.$$

Für  $k' \rightarrow k$  strebt dieser Ausdruck gegen  $\frac{e^{-k \varrho}}{\varrho}$ , wie es auch sein muß.

Ganz analog läßt sich die Normalableitung von  $\Pi$  für  $z = 0$  auswerten. Wir haben, mit der Abkürzung (46):

$$(60) \quad \left( \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_0 = \frac{k^2 - k'^2}{4} \int_0^\infty J_0(\lambda \varrho) (1 - \alpha^2) \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}$$

und folglich<sup>2)</sup>:

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_0 &= \frac{k^2 + k'^2}{4} \left\{ I_0 \left( \varrho \frac{k - k'}{2} \right) K_0 \left( \varrho \frac{k + k'}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - I_2 \left( \varrho \frac{k - k'}{2} \right) K_2 \left( \varrho \frac{k + k'}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Etwas komplizierter ist die Berechnung der Integrale  $\Phi$  und  $F$  [Formeln (28) und (25)], da dort im Nenner der Ausdruck

$$(62) \quad N = k^2 \sqrt{\lambda^2 + k'^2} + k'^2 \sqrt{\lambda^2 + k^2}$$

auftritt, dessen reziproker Wert nach Potenzen von  $\alpha^2$  entwickelt werden muß. Wir schreiben  $\Phi(\varrho, -0)$  in der Form

$$(63) \quad \Phi(\varrho, -0) = \int_0^\infty J_0(\lambda \varrho) \varphi \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}.$$

Die Größe  $\varphi$  hat jetzt die Bedeutung

$$(64) \quad \varphi = \frac{2 k^2 \sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}{k^2 \sqrt{\lambda^2 + k'^2} + k'^2 \sqrt{\lambda^2 + k^2}}$$

oder, durch  $\alpha$  ausgedrückt,

$$(65) \quad \varphi = \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + k'^2}} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{\alpha}} \frac{1 - \alpha^2}{1 - q \alpha}$$

1) A. a. O. Gl. (22).

2) A. a. O. Gl. (23).

wo zur Abkürzung

$$(66) \quad q = \frac{k^2 - k'^2}{k^2 + k'^2}$$

gesetzt ist.<sup>1)</sup> Da das Quadrat des „komplexen Brechungsindex“, d. h. die Größe

$$(67) \quad n^2 = \frac{k^2}{k'^2} = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

einen positiven reellen Teil hat, ist  $|q| < 1$ . Die Entwicklung von  $\varphi$  nach Potenzen von  $\alpha$  lautet

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + k'^2}} \left\{ \sqrt{q} \alpha^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{q}} \alpha^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \left( q - \frac{1}{q} \right) \sum_{m=0}^{\infty} q^{m+\frac{1}{2}} \alpha^{m+\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Bezeichnen wir also mit  $S$  die Summe

$$(69) \quad S = 2 \sum_{m=0}^{\infty} q^{m+\frac{1}{2}} I_{m+\frac{1}{2}} \left( \rho \frac{k-k'}{2} \right) K_{m+\frac{1}{2}} \left( \rho \frac{k+k'}{2} \right),$$

so bekommen wir

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(\rho, -0) &= \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + k'^2}} \left\{ \sqrt{q} I_{-\frac{1}{2}} K_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{q}} I_{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( q - \frac{1}{q} \right) S \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die Summe  $S$  läßt eine einfache Darstellung zu. Wir haben nämlich nach dem Additionstheorem (38), wenn wir dort  $v = \frac{1}{2}$  setzen und die Abkürzung (43) benutzen,

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{e^{-\alpha \varrho}}{\alpha} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\varrho}{\alpha}} K_{\frac{1}{2}}(\alpha \varrho) \\ &= \frac{4}{\sqrt{k^2 - k'^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left( m + \frac{1}{2} \right) I_{m+\frac{1}{2}} \left( \rho \frac{k-k'}{2} \right) \cdot \\ &\quad \cdot K_{m+\frac{1}{2}} \left( \rho \frac{k+k'}{2} \right) P_m(\cos \vartheta) \end{aligned} \right.$$

wo die  $P_m$  Legendresche Polynome sind. Andererseits können wir in der Summe  $S$  die Größe  $q^m$  in der Form

1) Verwechslung mit der Stromstärke  $q$  ist wohl nicht zu befürchten.

$$(72) \quad q^m = \int_0^\pi \left(m + \frac{1}{2}\right) P_m(\cos \vartheta) \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{1 - 2q \cos \vartheta + q^2}}$$

darstellen. Führt man nun (72) in (69) ein und benutzt man (71), so bekommt man

$$(73) \quad S = \frac{k^2 - k'^2}{2\sqrt{k^2 + k'^2}} \int_0^\pi \frac{e^{-\kappa \varrho}}{\kappa} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{1 - 2q \cos \vartheta + q^2}}.$$

Im Integral (73) können wir als Integrationsvariable die Größe  $\kappa$  wählen. Wir bekommen dann einfach

$$(74) \quad S = \int_{k'}^k e^{-\kappa \varrho} \frac{d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - h^2}},$$

wo zur Abkürzung

$$(75) \quad h^2 = \frac{k^2 k'^2}{k^2 + k'^2}$$

gesetzt ist. Drücken wir in (70) die Besselschen Funktionen durch  $e^{-k\varrho}$  und  $e^{-k'\varrho}$  aus, und führen wir dort den Ausdruck (74) für  $S$  ein, so läßt sich  $\Phi(\varrho, -0)$  in der folgenden expliziten Form schreiben

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(\varrho, -0) &= \frac{2k^2}{k^2 - k'^2} \left\{ \frac{1}{\varrho} (k^2 e^{-k'\varrho} - k'^2 e^{-k\varrho}) - \right. \\ &\quad \left. - k k' h \int_{k'}^k e^{-\kappa \varrho} \frac{d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - h^2}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Den Wert  $\Phi(\varrho, +0)$  bekommt man aus (76) durch Multiplikation mit  $\frac{k'^2}{k^2}$ . Läßt man  $k'$  gegen  $k$  streben, so reduziert sich (76) auf  $\frac{e^{-k\varrho}}{\varrho}$ , wie es auch zu fordern ist.<sup>1)</sup>

Wir berechnen nun den Wert der durch (25) definierten Funktion  $F(\varrho, z)$  für  $z = 0$ . Wir schreiben  $F(\varrho, 0)$  in der Form

$$(77) \quad F(\varrho, 0) = \int_0^\infty J_0(\lambda \varrho) \varphi \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}.$$

1) Die exponentiellen Glieder in (76) konvergieren gegen  $e^{-k\varrho} \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{k}{2}\right)$ , das zu subtrahierende Glied mit dem Integral gegen  $\frac{k}{2} e^{-k\varrho}$ .

Die Funktion  $\varphi$  ist in diesem Fall gleich

$$(78) \quad \varphi = \frac{q(1-\alpha^2)}{1-q\alpha}.$$

Wir schreiben die Potenzentwicklung von  $\varphi$  in der Form

$$(79) \quad \varphi = \frac{1}{2} \left( q + \frac{1}{q} \right) + \alpha + \frac{1}{2} \left( q - \frac{1}{q} \right) \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^m \alpha^m \right\}$$

und erhalten für  $F(\varrho, 0)$  den Ausdruck

$$(80) \quad F(\varrho, 0) = \frac{1}{2} \left( q + \frac{1}{q} \right) I_0 K_0 + I_1 K_1 + \frac{1}{2} \left( q - \frac{1}{q} \right) T,$$

wo mit  $T$  die Reihe

$$(81) \quad \left\{ \begin{aligned} T &= I_0 \left( \varrho \frac{k-k'}{2} \right) K_0 \left( \varrho \frac{k+k'}{2} \right) + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^m I_m \left( \varrho \frac{k-k'}{2} \right) K_m \left( \varrho \frac{k+k'}{2} \right) \end{aligned} \right.$$

bezeichnet ist. Um die Reihe  $T$  zu summieren, bemerken wir, daß  $q^m$  in der Form

$$(82) \quad q^m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1-q^2}{1-2q \cos \vartheta + q^2} \cos m \vartheta \, d\vartheta$$

darstellbar ist. Tragen wir (82) in (81) ein und benutzen wir das Additionstheorem

$$(83) \quad \left\{ \begin{aligned} &K_0(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta}) = \\ &= K_0(a) I_0(b) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_m(a) I_m(b) \cos m \vartheta, \end{aligned} \right.$$

welches aus (38) und (39) durch den Grenzübergang  $\nu \rightarrow 0$  entsteht, so bekommen wir für  $T$  die Darstellung

$$(84) \quad T = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} K_0(x \varrho) \frac{1-q^2}{1-2q \cos \vartheta + q^2} \, d\vartheta,$$

wo  $x$  die frühere Bedeutung (43) hat. Drückt man  $q$  durch  $k$  und  $k'$  aus, so bekommt man aus (84)

$$(85) \quad T = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} K_0(x \varrho) \frac{k^2 k'^2 \, d\vartheta}{k^4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + k'^4 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

und der Ausdruck (80) für  $F(\varrho, 0)$  wird dann<sup>1)</sup>

$$(86) \quad \left\{ \begin{aligned} F(\varrho, 0) &= \frac{k^4 + k'^4}{k^4 - k'^4} I_0 \left( \varrho \frac{k - k'}{2} \right) K_0 \left( \varrho \frac{k + k'}{2} \right) + \\ &+ I_1 \left( \varrho \frac{k - k'}{2} \right) K_1 \left( \varrho \frac{k + k'}{2} \right) - \frac{2k^3 k'^2}{k^4 - k'^4} T. \end{aligned} \right.$$

Wir wollen nun einige Eigenschaften der Funktionen  $S$  und  $T$  besprechen. Für endliche Werte von  $k$  und  $k'$  ist  $S$  eine ganze transzendente Funktion von  $\varrho$ ; für  $k \rightarrow \infty$  wird dagegen

$$(87) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S = K_0(k' \varrho),$$

so daß im Grenzfall eine logarithmische Singularität bei  $\varrho = 0$  auftritt. Dasselbe Verhalten zeigt  $S$  im Grenzfall  $k' \rightarrow 0$ . Die Funktion  $T$  wird für  $\varrho = 0$  logarithmisch unendlich, und zwar läßt sie sich in der Form

$$(88) \quad T = K_0(h \varrho) - \int_0^\infty J_0(\lambda \varrho) \frac{h^2}{\lambda^2 + h^2} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}$$

darstellen. Aus (88) folgt für  $\varrho \rightarrow 0$

$$(89) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} [T - K_0(h \varrho)] = \frac{1}{2} \lg \frac{k^2 + k'^2}{(k + k')^2}.$$

Im Grenzfall  $k \rightarrow \infty$  verschwindet das Integral in (88), während  $h = k'$  wird. Wir haben daher eine zu (87) analoge Beziehung

$$(90) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} T = K_0(k' \varrho),$$

und zwar gilt diese Gleichung, wegen (89), auch für verschwindende  $\varrho$ .

Die Funktionen  $S$  und  $T$  genügen den Differentialgleichungen

$$(91) \quad -\frac{d}{d\varrho} \left( \varrho \frac{dS}{d\varrho} \right) + h^2 \varrho S = \frac{hk}{k'} e^{-k\varrho} - \frac{hk'}{k} e^{-k'\varrho}$$

$$(92) \quad -\frac{d}{d\varrho} \left( \varrho \frac{dT}{d\varrho} \right) + h^2 \varrho T = -h^2 \varrho I_0 \left( \varrho \frac{k - k'}{2} \right) K_0 \left( \varrho \frac{k + k'}{2} \right).$$

Wir haben die Werte der Funktionen  $F$  und  $\Phi$  für  $z = 0$  durch bekannte Funktionen, sowie durch  $S$  und  $T$  ausgedrückt [Formeln (76) und (86)]. Diese Ausdrücke können aber auch zur Bestimmung von  $\frac{\partial F}{\partial z}$  und  $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$  für  $z = +0$  und  $z = -0$  benutzt werden, denn die ersten Ableitungen von  $F$  und  $\Phi$  nach  $z$  lassen sich nach (27) und (30) durch  $F$  und  $\Phi$  aus-

1) A. a. O. Gl. (24 bis), wo aber einige Druckfehler zu berichtigen sind.

drücken. Bei der Berechnung der höheren Ableitungen nach  $z$  für  $z = 0$  mit Hilfe der Wellengleichung können mit Vorteil die Relationen (91) und (92) gebraucht werden.

#### B. Der quasistationäre Fall

Bei der Untersuchung von Erdströmen spielt der quasistationäre Fall eine wichtige Rolle. Dieser Fall wird bekanntlich dadurch charakterisiert, daß der Maxwell'sche Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom vernachlässigt wird. Man darf annehmen, daß die Voraussetzung des quasistationären Falles erfüllt ist, wenn die in Betracht kommenden Entfernungen klein sind gegenüber der Wellenlänge in der Luft. Im quasistationären Fall kann man

$$(93) \quad k' = 0; \quad k = \frac{\sqrt{2\pi\sigma\omega\mu}}{c} (1 - i)$$

setzen. Alle Formeln vereinfachen sich dann beträchtlich. In den oben abgeleiteten Ausdrücken für die Feldgrößen an der Erdoberfläche verschwinden die Glieder, welche  $S$  und  $T$  enthalten; in der Tat werden diese Größen für  $k' \rightarrow 0$  nur wie  $\lg k'$  unendlich, während sie mit Faktoren multipliziert werden, welche wie  $k'^2$  verschwinden.

Wir stellen unsere Formeln für den betrachteten Fall zusammen. Wir haben

$$(94) \quad \Pi(\varrho, 0) = \frac{2}{k^2 \varrho^3} \{ 1 - (1 + k\varrho)e^{-k\varrho} \},$$

$$(95) \quad \left( \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_0 = \frac{k^3}{4} \left\{ I_0 \left( \frac{k\varrho}{2} \right) K_0 \left( \frac{k\varrho}{2} \right) - I_2 \left( \frac{k\varrho}{2} \right) K_2 \left( \frac{k\varrho}{2} \right) \right\},$$

$$(96) \quad \Phi(\varrho, -0) = \frac{2}{\varrho},$$

$$(97) \quad F(\varrho, 0) = I_0 \left( \frac{k\varrho}{2} \right) K_0 \left( \frac{k\varrho}{2} \right) + I_1 \left( \frac{k\varrho}{2} \right) K_1 \left( \frac{k\varrho}{2} \right).$$

Alle Größen lassen sich also in diesem Fall in endlicher Form durch tabulierte Funktionen

$$(98) \quad \begin{cases} \text{ber}(x), & \text{bei}(x), & \text{ber}'(x), & \text{bei}'(x), \\ \text{ker}(x), & \text{kei}(x), & \text{ker}'(x), & \text{kei}'(x) \end{cases}$$

ausdrücken. Das magnetische Feld, welches durch die Formeln (20), (23), sowie (94), (95), (96), (97) bestimmt wird, ist, für den Fall, daß das Kabel drei Seiten eines Quadrats bildet, im Geophysikalischen Institut in Leningrad für verschiedene Werte der Seitenlänge und der Größe  $|k|$  berechnet worden. Da der Zweck dieser Arbeit ein mehr theoretischer ist, wollen wir auf die Diskussion der numerischen Resultate nicht eingehen.

Im quasistationären Fall läßt sich das Feld auch unter der Erdoberfläche ( $z < 0$ ) durch bekannte Funktionen ausdrücken. Alle Größen reduzieren sich dann auf die beiden Integrale

$$(99) \quad P = \int_0^{\infty} J_0(\lambda \varrho) e^{V\lambda^2 + k^2 z} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} = I_0 \left( k \frac{r+z}{2} \right) K_0 \left( k \frac{r-z}{2} \right),$$

$$(100) \quad Q = \int_0^{\infty} J_0(\lambda \varrho) e^{V\lambda^2 + k^2 z} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} = \frac{e^{-kr}}{r}.$$

Die zweite Formel ist bekannt. Um die erste zu beweisen, genügt es zu bemerken, daß beide Seiten für  $z < 0$  reguläre Lösungen der Wellengleichung sind, welche für  $z = 0$  nach (52) übereinstimmen. Übrigens verifiziert man leicht auch die Übereinstimmung der Normalableitungen für  $z = 0$ .

Die Funktionen  $\Phi(\varrho, z)$  und  $F(\varrho, z)$  können, wie man den Integraldarstellungen (28) und (25) entnimmt, durch die Ableitungen von  $P$  und  $Q$  wie folgt ausgedrückt werden:

$$(101) \quad \Phi(\varrho, z) = 2 \frac{\partial P}{\partial z},$$

$$(102) \quad F(\varrho, z) = \frac{2}{k^2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right).$$

Um die Ableitungen zu berechnen, setzen wir

$$(103) \quad u = k \frac{r+z}{2}; \quad v = k \frac{r-z}{2}.$$

Dann wird

$$(104) \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u}{r}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{v}{r},$$

und wir erhalten für  $\Phi$  und  $F$  die Formeln

$$(105) \quad \Phi(\varrho, z) = \frac{2}{r} [u I_1(u) K_0(v) + v I_0(u) K_1(v)],$$

$$(106) \quad \begin{cases} F(\varrho, z) = \frac{2z}{k^2 r^3} [(1+kr) e^{-kr} - u I_1(u) K_0(v) - v I_0(u) K_1(v)] \\ \quad + \frac{2(u^2+v^2)}{k^2 r^2} I_0(u) K_0(v) + \frac{4uv}{k^2 r^2} I_1(u) K_1(v). \end{cases}$$

Den Wert von  $\Pi(\varrho, z)$  bekommt man daraus nach der Formel (27).

Für große Entfernungen verhalten sich die Größen  $P$  und  $Q$  [Gl. (99) und (100)] in verschiedener Weise. Der asymptotische Ausdruck für  $P$  lautet nämlich

$$(107) \quad P \sim \frac{1}{k \varrho} e^{kz} = \frac{1}{k \varrho} e^{-k|z|}.$$

Die Größe  $P$  entspricht somit einer Erregung, welche sich zunächst im oberen Medium ohne Absorption fortpflanzt und dann durch die Erdoberfläche nach unten eindringt, wobei sie eine exponentielle Abschwächung erleidet. Die Größe  $Q$  entspricht dagegen einer Erregung, die sich ausschließlich im unteren Medium fortpflanzt. Ein analoges Verhalten zeigen auch die Ableitungen von  $P$  und  $Q$  nach  $z$ , aus denen das Feld zusammengesetzt ist. Es läßt sich also auch im elektromagnetischen Feld eine von oben eindringende Erregung von einer durch das untere Medium sich fortpflanzenden trennen. In der Nähe des Quellpunktes kompensieren sich die beiden Erregungen derart, daß das resultierende Feld dort nicht stärker als in vorgeschriebener Weise unendlich wird. Es ist zu erwarten, daß dieser Tatbestand auch im nichtstationären Fall erhalten bleibt.

Für  $z > 0$  lassen sich die Größen  $F'$  und  $H'$  auch im quasistationären Fall nicht in endlicher Form durch bekannte Funktionen ausdrücken. Es läßt sich aber für diese Größen eine beständig konvergente Entwicklung nach steigenden Potenzen von  $kr$  (mit logarithmischen Gliedern), sowie eine semikonvergente Entwicklung nach fallenden Potenzen von  $kr$  aufstellen. Wir wollen diese Entwicklungen nicht anführen, da sie von keinem besonderen Interesse sind.

Leningrad, Physikal. Forschungsinstitut der Universität.

(Eingegangen 7. April 1933)



## Ein Zustandsdiagramm für ternäre Gemische

Von V. Fischer

(Mit 1 Figur)

Es wird ein ebenes  $z, T$ -Diagramm für ternäre Gemische entwickelt. Am Beispiel des Gemisches Sauerstoff-Stickstoff-Argon wird gezeigt, wie sich in diesem Diagramm die Gleichgewichts-isobaren des ternären Gemisches darstellen lassen.

1. Bei ternären Gemischen ergeben sich außer Temperatur und Druck noch zwei Konzentrationen als unabhängige Veränderliche, während die dritte Konzentration durch die Bedingung bestimmt ist, daß die Summe der drei Konzentrationen gleich Eins sein muß. Diese letztere Bedingung führte zur Benutzung eines gleichseitigen Dreieckes, um z. B. die Isothermen ternärer Gemische zeichnerisch darzustellen. Diese Isothermen gestatten es aber nicht, die Gleichgewichtskonzentrationen eines flüssigen Gemisches und seines Dampfes oder einer Legierung und ihrer Schmelze für eine gegebene Temperatur aus dem Dreiecksdiagramm abzulesen. Im nachfolgenden wird am Beispiel des Sauerstoff-Stickstoff-Argon-Gemisches ein ebenes Diagramm entwickelt, aus dem sich für jede Temperatur die zugehörigen Gleichgewichtskonzentrationen von Flüssigkeit und Dampf entnehmen lassen.

### Sauerstoff-Stickstoff-Argon-Gemische

2. Wir bezeichnen die Volumenkonzentrationen des Dampfes mit  $z_o, z_n, z_a$  und des Flüssigkeitsgemisches mit  $z_o, z_n, z_a$ , sowie die Sättigungsdrucke der reinen Bestandteile mit  $p_{o,0}, p_{n,0}, p_{a,0}$ . Druck und Temperatur des Gemisches im Gleichgewicht seien  $p$  und  $T$ .

Den Einfluß der Mischungswärmen auf das Gleichgewicht können wir bei dem O-N-Ar-Gemisch als gering vernachlässigen. Ferner setzen wir voraus, daß sich das Dampf-gemisch bei dem Druck  $p$  wie ein vollkommenes Gas verhält. Es gilt dann für das Gleichgewicht zwischen Flüssigkeits- und Dampf-gemisch:

$$(1) \quad p_{so} z_o = p z_o,$$

$$(2) \quad p_{sn} z_n = p z_n,$$

$$(3) \quad p_{sa} z_a = p z_a.$$

Unter Beachtung von

$$(4) \quad z_o + z_n + z_a = 1$$

folgt aus (1) bis (3)

$$(5) \quad p_{so} z_o + p_{sn} z_n + p_{sa} z_a = p.$$

Aus (5) erhalten wir nach einfacher Umformung

$$(6) \quad z_o = \frac{p_{sn} - p - z_a (p_{sn} - p_{sa})}{p_{sn} - p_{so}}.$$

Für  $z_a = 0$  geht (6) über in den Ausdruck für das binäre Gemisch N-O

$$(7) \quad z_o = \frac{p_{sn} - p}{p_{sn} - p_{so}}.$$

Ebenso ergibt sich mit

$$(8) \quad z_o + z_n + z_a = 1$$

aus (1) bis (3)

$$(9) \quad \frac{z_o}{p_{so}} + \frac{z_n}{p_{sn}} + \frac{z_a}{p_{sa}} = \frac{1}{p}.$$

Damit wird

$$(10) \quad z_o = \frac{\frac{1}{p_{sn}} - \frac{1}{p} - z_a \left( \frac{1}{p_{sn}} - \frac{1}{p_{sa}} \right)}{\frac{1}{p_{sn}} - \frac{1}{p_{so}}}.$$

3. Wir verwenden nun das übliche Diagramm für binäre Gemische mit zwei Ordinatenachsen im Abstand Eins voneinander, wobei die Temperaturen  $T$  als Ordinaten eingetragen werden; nur mit dem Unterschiede, daß jetzt die Abszissen nicht zwei, sondern drei zusammengehörige Konzentrationen darstellen.

Zur Darstellung in diesem Diagramm ist noch folgendes zu bemerken: Bei gegebener Temperatur  $T$  und gegebenem Druck  $p$  enthalten die drei Gl. (1) bis (3) vier Konzentrationen als Unbekannte, da je eine Dampf- und Flüssigkeitskonzentration durch (4) und (8) bestimmt ist. Wir müssen daher für eine Konzentration eine Annahme treffen, und zwar berechnen wir für einen gegebenen gleichbleibenden Druck  $p$  und verschiedene Temperaturen  $T$  aus Gl. (6)  $z_o$  bei gleichbleibenden Werten von  $z_a$ . Die zu  $T$  gehörigen Sättigungsdrucke sind hierbei aus Dampfspannungstabellen zu entnehmen. Mit  $z_o$

und  $z_o$  ergibt sich aus (1) und (3)  $z_o$  und  $z_a$ . Aus (4) und (8) folgt dann  $z_v$  und  $z_n$ . Es sei z. B.

$$p = 1 \text{ Atm.}, T = 80^\circ \text{ abs.}^1) \text{ und } z_a = 0,1,$$

dann erhalten wir aus (6)

$$z_o = \frac{1,3625 - 1 - 0,1(1,3625 - 0,4232)}{1,3625 - 0,3037} = 0,254,$$

sowie aus (1) und (3)

$$z_o = 0,3037 \cdot 0,254 = 0,077,$$

$$z_a = 0,4232 \cdot 0,1 = 0,042.$$

Damit folgt aus (4) und (8)

$$z_v = 1 - 0,077 - 0,042 = 0,881,$$

$$z_n = 1 - 0,254 - 0,1 = 0,646.$$

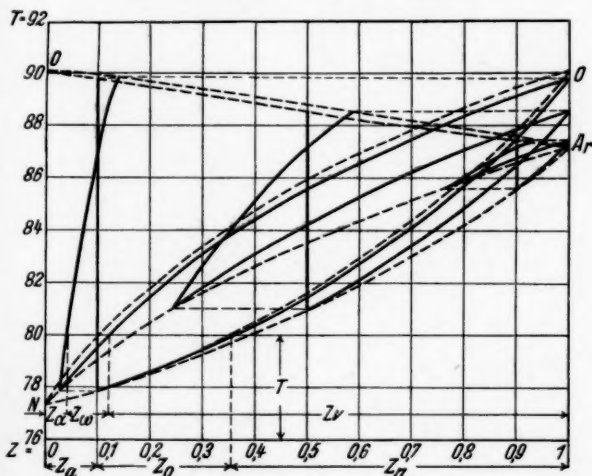


Fig. 1. Gleichgewichts-isobaren des Sauerstoff-Stickstoff-Argon-Gemisches

Diese Werte tragen wir in das  $z, T$ -Diagramm Fig. 1 ein. In gleicher Weise sind weitere Punkte der Isobaren für 1 Atm. bei  $z_a = 0,1$  berechnet und die sich daraus ergebenden

1) Die zu  $T$  gehörigen Werte der Sättigungsdrucke  $p_o$  und  $p_n$  vgl. bei B. F. Dodge u. H. N. Davis, Journ. amer. chem. soc. 49. S. 615. 1927. Die Werte von  $p_a$  vgl. bei Landolt-Börnstein, Physikal.-chem. Tabellen, 5. Aufl., herausgeg. von W. A. Roth u. K. Scheel, Berlin 1923.

Flüssigkeits- und Dampfäste dieser Isobaren in das  $z, T$ -Diagramm eingezeichnet. Wir sehen, daß sich der Flüssigkeitsast  $z_a = \text{const}$  mit dem Dampfaste, der die zugehörigen Gleichgewichtskonzentrationen  $z_a$  bestimmt, bei der Sättigungstemperatur  $T_{s,a} = 87,25^\circ$  abs. des Argons für 1 Atm. schneidet, denn es wird dann  $p_{s,a} = p = 1$ , und Gl. (3) geht damit über in  $z_a = z_a$ . Dies ist von Bedeutung für den Trennungsvorgang bei der Rektifikation flüssiger Luft. Es wird die vom Kopf der Trennungssäule herabrieselnde Flüssigkeit sich mit Argon anreichern bis die Stelle ungefähr erreicht ist, wo die dem Säulendruck  $p$  entsprechende Temperatur  $T_{s,a}$  herrscht. Von dieser Stelle an wird die herabrieselnde Flüssigkeit allmählich wieder ärmer an Argon.

Im Diagramm Fig. 1 sind noch die Isobaren für 1 Atm. und  $z_a = 0,5$ , sowie  $z_a = 0,9$  eingetragen. Ferner enthält das Diagramm in gestrichelten Linien die Isobaren der binären Gemische N-Ar, Ar-O und O-N. Man erkennt daraus, wie die Isobaren der ternären Gemische von den Isobaren der drei binären Gemische begrenzt werden.

Schließlich sei noch bemerkt, daß sich ebenso wie  $z_a$  auch  $z_o$  konstant setzen und  $z_o$  aus (10) berechnen läßt.

Berlin-Johannisthal.

(Eingegangen 6. Mai 1933)

H.

mit

bestin  
Elem  
einze  
stehe  
Appa  
chen  
schie  
fokus  
und  
haben  
schlie  
gleich  
dener  
fokus  
trägl  
oder

mete  
Tatsa  
fokus  
digke  
arbei  
erzeu  
und  
bomb  
besti  
Schli

Ar

## **Ein Massenspektrometer mit Richtungs- und Geschwindigkeitsfokussierung**

**Von H. Bondy und K. Popper**

(Mit 10 Figuren)

### **I. Einleitung**

Die Analyse positiver Strahlen (Kanal- und Anodenstrahlen) bestimmt das Verhältnis  $e/m$  und, da  $e$  nur eine oder mehrere Elementarladungen betragen kann, damit auch die Masse der einzelnen Bestandteile, aus denen die positiven Strahlen bestehen. Man kann etwa drei Gruppen der hierzu verwendeten Apparatypen unterscheiden. In dem einen Fall werden Teilchen gleicher Masse und gleicher Geschwindigkeit, die verschiedene Richtungen haben können, vereinigt (Richtungs-fokussierung). Im zweiten Fall werden Teilchen gleicher Masse und gleicher Richtung, die verschiedene Geschwindigkeiten haben können, fokussiert (Geschwindigkeitsfokussierung) und schließlich werden in der dritten Art von Apparaten Teilchen gleicher Geschwindigkeit und gleicher Richtung, aber verschiedener Massen gesammelt (Geschwindigkeitsfilter, „Massen-fokussierung“), wobei natürlich im letzteren Fall eine nachträgliche Trennung der verschiedenen Massen im elektrischen oder magnetischen Felde erfolgen muß.

Als Beispiel für den ersten Fall ist vor allem das Spektrometer von A. J. Dempster<sup>1)</sup> zu erwähnen. Er benützt die Tatsache, daß in einem Magnetfeld nach  $180^\circ$  eine Richtungs-fokussierung der Strahlen eintritt. Da aber keine Geschwindigkeitsfilterung stattfindet, kann er nur mit Anodenstrahlen arbeiten. Die Ionen werden auf Platin- oder Wolframfolien erzeugt, die mit den zu untersuchenden Stoffen bedeckt sind und die durch elektrischen Strom und durch Elektronen-bombardement erhitzt werden. Die Ionen fallen durch eine bestimmte Potentialdifferenz  $V$  und betreten danach durch einen Schlitz das Magnetfeld, in dem sie entsprechend ihren Massen

1) A. J. Dempster, Phys. Rev. 11. S. 316. 1918.

Kreisbahnen beschreiben. Nach  $180^\circ$  befindet sich wieder ein Schlitz, durch den die Teilchen auf einen mit einem Elektrometer verbundenen Auffänger fallen können. Das Verhältnis  $e/m$  ist gegeben durch die Beziehung

$$\frac{e}{m} = \frac{2V}{\mathfrak{H}^2 e^2},$$

wobei  $\rho$  der Radius der Kreisbahn ist, die die Partikeln im Magnetfeld  $\mathfrak{H}$  zurücklegen. Durch Variation von  $V$  kann Dempster der Reihe nach die verschiedenen Massen auf den Auffänger bringen.

Bei den Apparaten mit Geschwindigkeitsfokussierung erfolgt die Registrierung der verschiedenen Massen meistens mit einer photographischen Platte. Als positive Strahlenquelle eignen sich hier am besten Kanalstrahlen. F. W. Aston<sup>1)</sup>, der die Ionen nacheinander durch ein elektrisches und magnetisches Feld ablenkt, erreicht dadurch, daß Strahlen gleicher Masse trotz verschiedener Geschwindigkeiten in einem bestimmten Punkt der photographischen Platte vereinigt werden. Um aber Partikel gleicher Bewegungsrichtung zu erhalten, müssen sehr enge Blenden verwendet werden, was einen starken Energieverlust zur Folge hat.

Der dritte Fall wird durch das Smythesche<sup>2)</sup> Geschwindigkeitsfilter realisiert, das aus einer geeigneten Kombination von Wechselfeldern besteht und Massen gleicher Geschwindigkeit aussiebt. Zur Trennung der Massen verwendet W. R. Smythe und J. Mattauch<sup>3)</sup> ein radiales elektrisches Feld.

Nachdem A. Hughes und V. Rojansky<sup>4)</sup> berechnet hatten, daß im elektrischen Radialfeld nach einem Winkel von  $127^\circ 17'$  ( $\pi/\sqrt{2}$ ) eine ähnliche Richtungsfokussierung wie im Magnetfeld nach  $180^\circ$  stattfindet, benützt J. Mattauch<sup>5)</sup> dieselbe in seinem neuen Massenspektrometer.

Hughes und Rojansky, die wie erwähnt, eine gute Richtungsfokussierung der geladenen Teilchen erhalten, zeigen aber auch, daß nach Durchlaufen desselben Winkels ein Maximum der Auflösung bezüglich der Geschwindigkeiten eintritt.

W. Bartky und A. J. Dempster<sup>6)</sup> beschreiben nun eine Kombination von elektrischen und magnetischen Feldern, die

1) F. W. Aston, *Phil. Mag.* **38**, S. 707. 1919.

2) W. R. Smythe, *Phys. Rev.* **28**, S. 1275. 1926.

3) W. R. Smythe u. J. Mattauch, *Phys. Rev.* **40**, S. 429. 1932.

4) A. Hughes u. V. Rojansky, *Phys. Rev.* **34**, S. 284. 1929.

5) J. Mattauch, *Phys. Ztschr.* **33**, S. 899. 1932.

6) W. Bartky u. A. J. Dempster, *Phys. Rev.* **33**, S. 1019. 1929.

an ein und derselben Stelle sowohl Richtungs- als auch Geschwindigkeitsfokussierung mit weitgehender Genauigkeit bewirkt; natürlich vorausgesetzt, daß die Verschiedenheiten in den Geschwindigkeiten nicht zu groß sind.

Die Überlegungen von Bartky und Dempster sind folgende. Es tritt ein geladenes Partikel in einen zylindrischen Kondensator, in dem ein elektrisches Feld radial nach außen gerichtet ist, ein; außerdem soll in dem Kondensator auch ein homogenes transversales Magnetfeld herrschen und zwar so, daß die Teilchen gegen die Innenplatte des Kondensators abgelenkt werden. Aus dieser gleichzeitigen Einwirkung von elektrischem und magnetischem Feld errechnen die Autoren die Bahn des geladenen Teilchens und bekommen unter Einhaltung gewisser Beziehungen zwischen den Feldgrößen, dem Radius der Bahn und der Geschwindigkeit des Partikels die genannte doppelte Fokussierung nach einem Winkel von  $127^{\circ} 17'$ .

Eine genauere Berechnung führt zu einer Formel für den Radiusvektor der Bahn an der Fokussierungsstelle

$$r = \varrho \left( 1 - c_0 + \frac{c_0^2}{3} + \frac{c_1^2}{3} + \delta^2 + \frac{\pi}{\sqrt{2}} c_1 \delta \right),$$

die eine Abschätzung der erreichbaren Genauigkeit der Fokussierung ermöglicht. In diese Formel gehen die Anfangsbedingungen, unter denen das Teilchen den Kondensator betritt, ein und zwar in folgender Weise: die Stelle, wo das Teilchen links oder rechts vom mittleren Radius  $\varrho$  eintritt, durch

$$r_0 = \varrho (1 + c_0),$$

der Winkel, unter dem es eintritt, durch

$$\frac{1}{\varrho} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = c_1$$

( $r, \varphi$  Polarkoordinaten; Mittelpunkt des Kondensators als Ursprung), und die Variation der Geschwindigkeit durch

$$\left( \frac{d\varphi}{dt} \right)_{\varphi=0} = \text{const.} \cdot (1 + \delta).$$

$c_0, c_1$  und  $\delta$  sind kleine Größen, die die Abweichungen von den der Theorie zugrunde liegenden Anfangsbedingungen beinhalten, und deren höhere Potenzen bei der Entwicklung der Formel für  $r$  vernachlässigt wurden.

Wenn die Geschwindigkeiten der Teilchen um einen Mittelwert von  $15\%$  schwanken ( $\delta = \frac{15}{1000}$ ) und wenn der Öffnungswinkel der Strahlen 1:25 ist ( $c_1 = \frac{2}{100}$ ), erhält man

$r = \rho(1 - c_0)$  mit einem Fehler von ungefähr  $1\text{‰}$ . Bei der Fokussierung nach  $180^\circ$  im Magnetfeld allein könnte unter sonst gleichen Bedingungen  $r$  bestenfalls mit einem Fehler von  $15\text{‰}$  bestimmt werden, da ja die Geschwindigkeit um diesen Betrag schwankt, keine Geschwindigkeitsfokussierung stattfindet und der Bahnradius im Magnetfeld allein direkt proportional der Geschwindigkeit ist. Wir bekommen also den Wert von  $r$  in dieser neuen Methode 15 mal genauer, wenn die Geschwindigkeit um  $15\text{‰}$  schwankt.

Eine einfache Überlegung ergibt, daß bei gleichen Apparatekonstanten (mittlerer Radius, Schlitzbreite) das Auflösungsvermögen bei der neuen Methode um ein Vielfaches besser sein muß, als bei der alten Dempsterschen, wenn eine Geschwindigkeitsvariation im genannten Betrage vorhanden ist. Dieser Unterschied wird um so größer, je größer der Radius und je kleiner die Schlitzbreite ist.

## II. Apparatur

Bei der Ausführung der Apparatur nach der neuen Methode mußten die theoretischen Forderungen soweit als möglich eingehalten werden. Die Anodenstrahlen ( $\delta$  klein, d. h. geringe Geschwindigkeitsschwankungen) sollen sich in einem Zylinderkondensator bewegen, in dem sie durch ein elektrisches Feld radial nach außen und durch ein homogenes Magnetfeld entgegengesetzt nach innen abgelenkt werden, die Eintrittsrichtung soll von der Richtung des senkrechten Einfalles nicht weit abweichen ( $c_1$  klein, d. h. kleiner Öffnungswinkel) und die Eintrittsstellen selbst sollen in einem engen Bereich um die Mitte zwischen den Kondensatorplatten liegen ( $c_0$  klein). Dies letztere wird erreicht, indem man einfach ein enges Strahlenbündel durch einen Spalt aussiebt. Von diesem Bündel werden durch den engen Kondensator und dadurch, daß sich an seinem Ende wieder ein ähnlicher Spalt wie am Anfang befindet, nur die Strahlen durchgelassen, die annähernd Kreisbahnen durchlaufen, während alle übrigen am Kondensator oder Endschlitz ihre Ladung abgeben. Der Anfangsspalt selbst soll gleichmäßig von den Anodenstrahlen bedeckt sein.

Die Strahlen werden durch eine Glühanode erzeugt, die dem Spalt gegenübergestellt ist und die noch später beschrieben werden wird. Ihre Geschwindigkeit erhalten die Ionen durch eine Beschleunigungsspannung  $V$ , die zwischen Anode und Spalt angelegt wird. Die Partikeln treten in den Kondensator mit der Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2V \frac{e}{m}}$$

H.

ein,  
werde  
Bezie(1)  
und  
(2)wo  $X$   
spann  
Radiu  
Partik  
einfach

(3)

I

gleich  
schied  
und c  
varii  
und H  
Masse  
teile,  
genau  
stellt.  
änder  
maneDime  
Magn  
hoher  
wurde(4)  
und  
(5) $(e = 1$   
 $\cdot 10^{-19}$   
H in



ein, durchlaufen einen Bogen von  $\pi/\sqrt{2}$ , wo sie fokussiert werden, wenn die nach der vorgenannten Theorie geforderten Beziehungen eingehalten werden. Diese lauten

$$(1) \quad X = \frac{e}{m} \frac{e^2 H^2}{4} \log \frac{R_2}{R_1}$$

und

$$(2) \quad V = \frac{e}{m} \cdot \frac{e^2 H^2}{8},$$

wo  $X$  die angelegte Kondensatorspannung,  $V$  die Beschleunigungsspannung,  $H$  die magnetische Feldstärke,  $\rho$  den mittleren Radius des Kondensators und  $e/m$  die spezifische Ladung des Partikels bedeuten. Die beiden Gl. (1) und (2) zeigen eine einfache Beziehung zwischen den beiden Spannungen  $X$  und  $V$

$$(3) \quad X = 2V \log \frac{R_2}{R_1}.$$

Der mittlere Radius  $\rho$  des Kondensators ist fest und gleich  $R_1 + \frac{1}{2}(R_2 - R_1)$ . Infolgedessen kann man, damit verschiedene Massen den beiden Gleichungen genügen, entweder  $V$  und damit  $X$  variieren, oder  $V$  und  $X$  festlassen und nur  $H$  variieren. Dempster, der nur eine Beziehung zwischen  $V$  und  $H$  hat, läßt  $H$  konstant und variiert  $V$ , um die verschiedenen Massen an den Auffänger zu bringen. Dies hat große Vorteile, weil  $V$  leichter zu messen, das elektrische Feld immer genau reproduzierbar ist und sich auch immer momentan einstellt. Da aber in unserem Fall mit  $V$  auch immer  $X$  geändert werden müßte, fiel vorläufig die Entscheidung trotz mancher Nachteile auf die Variation von  $H$ .

Die Dimensionierungen der neuen Apparatur wurden den Dimensionen und der Leistungsfähigkeit des vorhandenen Magneten angepaßt. Um alle möglichen Massen bei nicht zu hohen Spannungen noch auf den Auffänger zu bekommen, wurden folgende Maße gewählt

$$\rho = 40 \text{ mm}, \quad R_2 - R_1 = 2 \text{ mm}, \quad V \text{ etwa } 100 \text{ Volt.}$$

Die Formeln (2) und (3) gehen dann über in die spezielleren

$$(4) \quad H = 72,01 \sqrt{V} \cdot \sqrt{M}$$

und

$$(5) \quad X = 0,1 \sqrt{V}$$

( $e = 1,591 \cdot 10^{-20}$  elektromagnetische Einheiten,  $m = 1,65 \cdot 10^{-24}$  M g,  $M$  = Molekulargewicht des Ions,  $V$  und  $X$  in Volt,  $H$  in Gauss).

In den theoretischen Untersuchungen war vorausgesetzt worden, daß auf die Partikeln vor dem Eintritt in den Kondensator kein ablenkendes Feld wirkt. Bezüglich des elektrischen Feldes läßt sich dies ungefähr erreichen, indem man die bereits erwähnten Spalte am Anfang und Ende des Kondensators an Erde legt. Beim Magnetfeld kann man das nicht erreichen, weil dieses als homogen vorausgesetzt worden war und dies zur Folge hat, daß man Vollkreispolschuhe nehmen muß, deren Radius einige Zentimeter größer ist als  $\varrho$ . Beim Verlassen des Kondensators werden die Teilchen sofort in einem Auffänger aufgefangen, und somit spielt das Magnetfeld an dieser Stelle keine Rolle. Zwischen Anode und Anfangsspalt aber wird sich dem elektrostatischen Beschleunigungsfeld ein Magnetfeld überlagern, das die Teilchen zwingt, krummlinige Bahnen schon vor dem Spalt zu durchlaufen. Diese Ablenkung von der geraden Bahn läßt sich leicht ausrechnen. Legen wir den Koordinatenursprung in die Anode, die positive  $z$ -Richtung in die Richtung der elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E}$  (Anode-Spalt) und die Richtung der positiven  $x$ -Achse in die der magnetischen Feldstärke  $\mathfrak{H}$ , so lauten die Bewegungsgleichungen

$$m \ddot{z} = e \mathfrak{E} - e \mathfrak{H} \dot{y},$$

$$m \ddot{y} = e \mathfrak{H} \dot{z}.$$

Unter der Annahme, daß für  $z = 0$  auch  $\dot{z}$  und  $\dot{y}$  Null ist, erhält man durch Integration in bekannter Weise die Bahngleichung eines Teilchens mit

$$y = k \arccos \sqrt{\frac{k-z}{k}} - \sqrt{kz - z^2},$$

wo  $k = \frac{2m \mathfrak{E}}{e \mathfrak{H}^2}$  bedeutet. Setzt man für  $z$  den Abstand  $a$  der Anode vom Schlitz und  $V/a$  für  $\mathfrak{E}$  ein, so wird

$$y_a = \frac{2m V}{e \mathfrak{H}^2 a} \arccos \sqrt{1 - \frac{e \mathfrak{H}^2 a^2}{2m V}} - \sqrt{\frac{2m V}{e \mathfrak{H}^2} - a^2}.$$

Nach Formel (2) ist  $\frac{8m V}{e \mathfrak{H}^2} = \varrho^2$ , so daß wir schließlich bekommen

$$y_a = \frac{\varrho^2}{4a} \arccos \sqrt{1 - \frac{4a^2}{\varrho^2}} - \sqrt{\frac{\varrho^2}{4} - a^2}.$$

Dies ergibt für  $\varrho = 40$  mm und  $a = 3$  mm eine Ablenkung von  $y_a = 0,302$  mm, für  $a = 2$  mm ein  $y_a = 0,135$  mm, während für  $a = 1$  mm nur  $y_a = 0,038$  mm folgt. Daraus ergibt sich die Forderung, die Anode möglichst nahe an den Spalt heran-

zurück, wenn man eine Verzerrung der Strahlen beim Eintritt in den Kondensator vermeiden will.

**Das Spektrometer.** Es besteht aus einer flachen, runden Messingschachtel *M* mit einem Innendurchmesser von 90 mm. Die beiden Deckel *Fe* aus Weicheisen besitzen Rillen, in die die Messingschachtel hineinpaßt. Der eine Deckel ist angelötet, der andere nur angelegt, um so jederzeit leicht in das Innere gelangen zu können. Diese Eisendeckel bilden die Fortsetzung der Polschuhe des Elektromagneten und haben wie diese einen Durchmesser von 120 mm. Die Entfernung der beiden Polschuhe beträgt 30,8 mm, das Interferrikum 16,2 mm.

In der Schachtel befindet sich der Zylinderkondensator *K*. Er besteht aus zwei 10 mm hohen, kreisförmig gebogenen Messingplatten mit einem Zen- triwinkel von  $127^{\circ} 17'$ . Die

beiden Radien der inneren Kondensatorplatte betragen 35,1 mm und 39 mm ( $R_1$ ), die der äußeren 41 mm ( $R_2$ ) und 44,5 mm; mithin ist der mittlere Radius  $\rho = 40$  mm. In ihrer Lage fixiert werden die Kondensatorplatten durch entsprechend geformte Hartgummischeiben, die ihrerseits an der Messingschachtel befestigt sind.<sup>1)</sup> Die Spannung wird dem Kondensator durch die isoliert eingeführten Drähte *D* zugeführt.

An den beiden Enden des Kondensators befinden sich, wieder mittels Hartgummiträger gehalten, je ein Schlitz *S*<sub>1</sub> und *S*<sub>2</sub> mit verstellbaren Backen, so daß durch Verschieben derselben die gewünschte Schlitzbreite eingestellt werden konnte. Die Höhe der Schlitzöffnung beträgt 6 mm. Die Lage des Kondensators wurde so gewählt, daß alle Teile desselben möglichst weit vom Rand der Schachtel zu liegen kommen, um sicher im homogenen Teil des Magnetfeldes arbeiten zu können.

Wie schon erwähnt wurde, dient als Ionenquelle eine Glühanode *A*. Sie wurde in der Form einer Siebanode nach

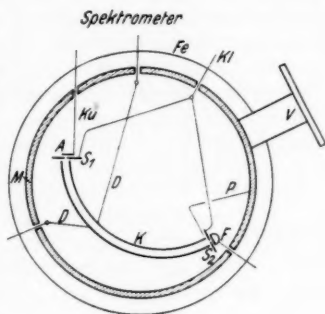


Fig. 1

1) Eine photographische Abbildung, die auch die weniger wichtigen Einzelheiten zeigt, ist in J. Mattauach, Über neue Methoden der Massenspektrometrie, Phys. Ztschr. 33. S. 903. 1932 enthalten.

H. Murawkin<sup>1)</sup> mit gutem Erfolg verwendet. Es ist dies ein Platinstreifen, der mit feinen Löchern versehen ist und auf dessen dem Spalt entgegengesetzter Seite die emittierende Substanz aufgeschmolzen wird. Der Platinstreifen wird zum Glühen gebracht und durch die Kleinheit der Löcher wird verhindert, daß größere Teilchen durchsickern, es können nur die Ionen durchgelangen. Auf diese Weise kann die Anode parallel an den ersten Schlitz herangerückt werden und man braucht nicht zu fürchten, daß sich ein nach unten hängender Tropfen bildet. Weitere Vorteile sind, daß dadurch, daß das Glas auf der Rückseite aufgetragen ist, die unteren verbrauchten Schichten immer durch neue, frische ersetzt werden können und daß man dickere Platinstreifen verwenden kann, die natürlich mechanisch fester sind, die aber durch die vielen Löcher den Widerstand eines dünneren Streifens besitzen.

Die Anoden wurden aus Platinstreifen von 0,01 mm Dicke, 4 mm Breite und 10 mm Länge hergestellt. In der Mitte wurde der Streifen durch Ausschneiden verengt und auf 4 mm Länge unter einer Lupe mit möglichst vielen Löchern versehen. Dann wurde er in zwei rechtwinklig gebogene, am Ende aufgeschnittene Kupferstäbe *Ku* von 1,4 mm Durchmesser eingeklemmt. Die Kupferstäbe selbst werden mittels Quarzröhrchen isoliert nach außen geführt und außen durch eine geeignete Vorrichtung vor jeder Lageänderung gesichert.

Die Anode wurde so justiert, daß die emittierende Fläche horizontal zu liegen kam und daß die Löcher, die durch Stechen mit einer feinen Nadel erzeugt wurden, sich nach unten verjüngten. Die Anode wurde so nah als möglich dem Spalt gegenüber parallel zu ihm angebracht. Das war bei den verschiedenen Versuchen in etwa 1 mm Entfernung. Die beiden Spalte *S<sub>1</sub>* und *S<sub>2</sub>* werden durch Drähte mit einer isolierten Klemme *Kl* verbunden, die ihrerseits über ein Galvanometer geerdet ist, und dessen Verwendung später noch erklärt wird.

Der Auffänger *F* besteht aus einem kleinen Messingbecher, der durch eine Messingstange dem Schlitz *S<sub>2</sub>* gegenüber gehalten wird. Die Stange ist hochisoliert herausgeführt und mit einem Elektrometer verbunden. Eine Messingplatte *P* schirmt den Auffänger gegen den anderen Teil des Gehäuses ab.

Schließlich mündet noch in die Schachtel der Pumpansatz *V*, der die Verbindung mit der Vakuumanordnung durch eine Flanschverbindung herstellt. Die Vakuumanlage besteht aus einer Gaedeschen Ölkapselpumpe als Vorpumpe,

1) H. Murawkin, *Ann. d. Phys.* [5] S. S. 203 u. 353. 1931.

einer zweistufigen Diffusionspumpe aus Stahl mit einer Saugleistung von 10 Liter pro Sekunde und einer durch flüssige Luft gekühlten Quecksilberfalle.

Das erreichte Vakuum wurde grob an den Entladungserscheinungen einer angeschlossenen Entladungsröhre und genauer mittels eines Ionisationsmanometers gemessen, das in der Nähe des Spektrometers angeschmolzen war. Als Ionisationsmanometer dient eine gewöhnliche Radoröhre alten Systems mit reinem Wolframdraht als Heizfaden. Die Eichung der Röhre geschah gleichzeitig mit anderen Röhren an einer Nebenapparatur mit Hilfe eines MacLeod-Manometers.

**Das Magnetfeld.** Zur Erzeugung des Magnetfeldes wurde ein großer Elektromagnet mit anschraubbaren, kegelstumpfförmigen Polschuhen aus „remanenzfreiem“ Spezialweicheisen verwendet. Der Magnetstrom wurde von einer Akkumulatorenbatterie mit einer Spannung von 120 Volt geliefert. Die Schaltung zeigt Fig. 2.

Die große Anzahl und die Auswahl der Vorschaltwiderstände

war nötig, um sehr kleine Änderungen des Stromes und damit des Magnetfeldes vornehmen und zu hohe Belastungen der einzelnen Widerstände vermeiden zu können. Das Ampereometer *A* war ein Normalampereometer mit Meßbereichen von 5 und 20 Amp. bei 100 Skt.

Schon die ersten Messungen zeigten aber, daß die Ableitung des Magnetstromes verfeinert werden mußte, es wurde daher ein Kompensationsapparat *K* herangezogen, mit dessen Hilfe der Spannungsabfall eines Normalwiderstandes (0,1 Ohm bei 20°C), der im Magnetstromkreis lag, gemessen wurde. Als Nullinstrument wurde ein Spiegelgalvanometer mit einer Empfindlichkeit von  $5 \cdot 10^{-9}$  Amp. pro Millimeter/Meter verwendet.

Die Eichung des Magnetfeldes geschah mit einer Wismutspirale von Hartmann & Braun. Die der Spirale beigegebene Eichkurve zeigt eine Genauigkeit von 0,5 %. Es ist auf ihr die magnetische Feldstärke als Abszisse und der Ausdruck

$z = \frac{W_1 - W_0}{W_0}$  als Ordinate aufgetragen.  $W_0$ , der Widerstand

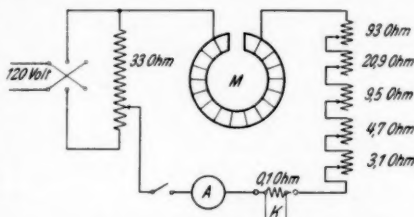


Fig. 2. Schaltung des Magnetstromkreises.  
*M* Magnet, *K* Kompensationsapparat,  
*A* Ampereometer

beim Magnetfeld Null, beträgt 6,57 Ohm für 21,1°C. Bei dieser Temperatur ist die Eichkurve für die Spirale aufgenommen worden.  $W_f$  ist der durch das Magnetfeld geänderte Widerstand. Es wurde mittels eines Stativs und einer Schlittenvorrichtung die Wismutspirale durch eine Öffnung, in der sich sonst der Erdungsstöpsel für die Spalte ( $Kl$  in Fig. 1) befindet, in das Spektrometer eingeführt. Die Spirale wurde dann normal zu den magnetischen Kraftlinien in dem Punkte montiert, wo nachher die Mitte des Kondensators zu liegen kam. Der Widerstand  $W_f$  wurde in einer frisch geeichten Wheatstonebrücke mit einem empfindlichen Galvanometer als

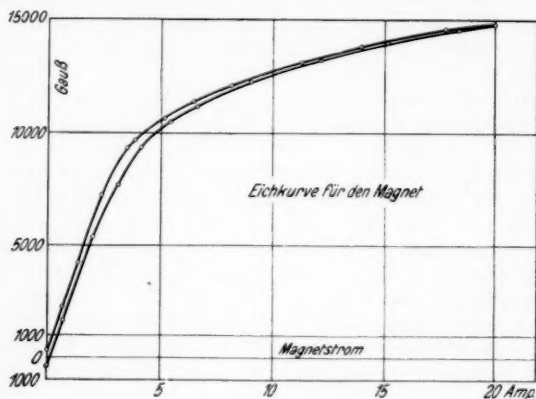


Fig. 3

Nullinstrument gemessen. Die Maximalbelastung der Spirale durfte dabei 5 mA nicht überschreiten und außerdem war der Strom immer nur für kurze Zeit zu schließen, damit die Erwärmung der Spirale durch den Strom klein bliebe. Da für die Genauigkeit der Eichung die Temperatur eine wesentliche Rolle spielt, wurde große Sorgfalt darauf verwendet, während der ganzen Eichung eine Temperatur von 21,1°C im Spektrometer zu haben. Mit einem Thermometer, das in das Spektrometer hineinragte, wurde dies immer kontrolliert.

Durch Änderung der Stromstärke in kleinen Intervallen, Bestimmung des dazugehörigen  $W_f$  und damit der magnetischen Feldstärke wurde die Eichkurve des Magneten in Form einer Magnetisierungsschleife aufgenommen (Fig. 3).

Durch Ausschaltung aller Widerstände kam man fast bis zur Sättigung. Bei einer maximalen Stromstärke von 20 Amp. erhielt man eine Feldstärke von 14900 Gauss. Von da wurde die Stromstärke wieder verkleinert bis zum Werte Null und dann mit der kommutierten Stromrichtung dasselbe gemacht. Die Feldumkehrpunkte wurden durch das Umlappen einer Magnetenadel bestimmt. Die Eichung wurde zweimal in großen Sprüngen wiederholt und immer sehr schöne Übereinstimmung gefunden. Als sich nach 6 Monaten wieder Gelegenheit gab, die Eichung zu wiederholen, betrug die maximale Abweichung von der früheren Eichung 0,75 %.

Zur Prüfung der Homogenität des Magnetfeldes im Spektrometer wurde mit der Spirale das Feld an verschiedenen Stellen gemessen. Hierbei zeigte sich auch an den am weitest auseinanderliegenden Punkten innerhalb des Spektrometers keine merkbare Abweichung. Natürlich wurden alle Eisenteile in der Nähe der Apparatur vermieden.

Die Streuung des Magneten war entsprechend seiner veralteten Bauart ziemlich groß, so daß es notwendig war, alle Meßinstrumente möglichst weit weg und in die richtige Lage zu den magnetischen Kraftlinien zu bringen. Der Magnet und mit ihm das ganze Gehäuse des Spektrometers standen dauernd mit Erde in guter Verbindung.

*Das radiale elektrische Feld.* Die zwischen der Kondensatorspannung  $X$  und der Beschleunigungsspannung  $V$  für den verwendeten Kondensator in Formel (3) gefundene Beziehung verlangt für ein  $V$  von ungefähr 100 Volt ein  $X$  von nur wenigen Volt. Diese lieferten einige hintereinander geschaltete Akkumulatoren. Bei den ersten Versuchen wurde die eine Kondensatorplatte geerdet, die andere auf Spannung gelegt. Später wurde die Mitte des Kondensators geerdet, um so eine mehr symmetrische Anordnung zu erhalten. Dies ist von Wichtigkeit wegen des Streufeldes am Anfang des Kondensators und auch deshalb, weil längs des ganzen Kondensators die Kraftlinien zu den geerdeten Eisenplatten ausbiegen. Die Schaltung für die  $X$ -Spannung zeigt Fig. 4.

Der Widerstand, über den die Enden der 16-Volt-Batterie geschlossen waren, war annähernd in der Mitte geerdet. Als

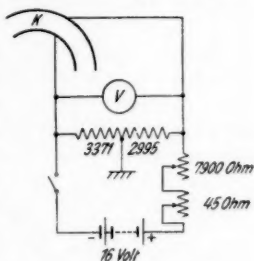


Fig. 4.  
Elektrisches Radialfeld.  
 $K$  Kondensator,  $V$  Voltmeter



Voltmeter diente ein 10-Ohm-Präzisionsinstrument mit einem Endausschlag von 15 Volt.

**Anodenheizung und Beschleunigungsspannung.** Die Heizung der Anode besorgte eine Akkumulatorenbatterie *B* von 4 Volt Spannung (Fig. 5).

Abgelesen wurde der Strom an einem Amperemeter mit einem Meßbereich von 10 Amp., wobei die  $\frac{1}{100}$  Amp. noch geschätzt werden konnten.

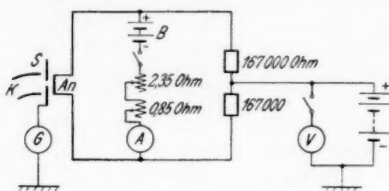


Fig. 5. Anodenheizung und Beschleunigungsspannung.  
*G* Galvanometer      *An* Anode  
*A* Amperemeter      *S* Spalt  
*V* Voltmeter      *B* Batterie

Reguliert wurde der Heizstrom mit zwei in Serie geschalteten Schiebewiderständen. Gleichzeitig wurde die Anode auch auf positive Spannung gebracht, um so die für die Beschleunigung der Ionen nötige Spannung zwischen Anode und geerdetem Spalt zu bekommen.

Die Spannung wurde von einer Anodenbatterie geliefert. Die Zuführung zur Anode geschah folgendermaßen: die Heizbatterie war über einen Doppelgraphitwiderstand von je 167 000 Ohm geschlossen. Die Mitte dieses Doppelwiderstandes war mit der Anodenbatterie verbunden. Mit dieser Schaltung wird bewirkt, daß der Potentialabfall des Heizstromes längs der Anode keinen einseitigen Einfluß ausübt und daß die abgelesene Beschleunigungsspannung in die Mitte der Anode zu liegen kommt. Die *V*-Spannung wurde zur Schonung der Anodenbatterie nicht dauernd beobachtet, sondern nur immer vor und nach jeder Meßreihe durch kurzes Einschalten eines Voltmeters kontrolliert. Als Voltmeter diente wieder ein Präzisionsvoltmeter mit einem Meßbereich von 150 Volt.

Da die ganze Heizleitung auf Spannung liegt, wurde besondere Sorgfalt auf ihre Isolation verwendet. So wurde der als Dichtungsmaterial dienende Spritzlack auf seine Leitfähigkeit geprüft und als recht guter Isolator gefunden.

**Das Elektrometer.** Die Ionen, die den Kondensator und den zweiten Schlitz passiert haben, werden in einem Käfig aufgefangen. Von diesem führt, wie schon erwähnt wurde, eine Messingstange durch einen Bernsteinpfropfen nach außen. Über diese Messingstange wurde eine Hülse gezogen, die einen dünnen Kupferdraht trägt, der zur Nadelklemme eines Elektro-



eters führt. Diese Leitung war gegen äußere Einflüsse durch ein geerdetes Metallrohr geschützt.

Als Elektrometer wird ein Lindemannelektrometer der Firma Spindler & Hoyer verwendet. Es ist nach dem Prinzip des Quadrantenelektrometers gebaut, hat eine kleine Kapazität und eine strenge Proportionalität zwischen Spannung und Ausschlag auch bei größeren Empfindlichkeiten. Die Ablesung erfolgt mittels Mikroskop. Bei Nadelschaltung und bei geeigneter Wahl der Hilfsspannungen können mit diesem Elektrometer Empfindlichkeiten von einigen 100 bis 1000 Skt. pro 1 Volt erreicht werden. Für eine bequeme und schnelle Feinregulierung der Quadrantenhilfsspannungen dient ein eigener Schaltkasten. Mit demselben kann auch der elektrische Nullpunkt der geerdeten Nadel immer mit ihrem mechanischen zum Zusammenfallen gebracht werden. Die Quadrantenspannungen liefert eine Anodenbatterie von 90 Volt, die in der Mitte geerdet ist. Die Kapazität des ganzen Systems (Auffänger, Zuleitungen und Elektrometer) wurde mit Hilfe eines Vergleichskondensators nach Harms geeicht und zu 15,1 cm gefunden. Der zu messende Ionenstrom zum Auffänger wurde bestimmt aus der Aufladegeschwindigkeit der Nadel. Da eine gewöhnliche Stoppuhr wegen der zu großen Nähe des Magneten nicht verwendbar erschien, wurde eine geeignete Stoppuhr, die nur Messingteile enthielt, konstruiert.

**Gesamtemission.** Um die Gesamtemission der Anode messen zu können, war der erste Spalt nicht direkt, sondern über ein Galvanometer *G* (Fig. 5) geerdet. Wie schon früher bemerkt wurde, führt im Spektrometer ein Draht vom Spalt isoliert nach außen (*Kl*, Fig. 1) und weiter zu einem Galvanometer, dessen zweite Klemme an Erde liegt. Dieses Galvanometer hatte eine besonders große Empfindlichkeit von  $9 \cdot 10^{-11}$  Amp. pro Millimeter/Meter.

### III. Messungen und vorläufige Ergebnisse

Nach Montierung und Justierung der einzelnen Bestandteile, insbesondere nach Herstellung der Anode und Aufschmelzen des Versuchsstoffes wurde das Massenspektrometer an die Vakuumanordnung angeschlossen, alle Fugen und Metallteile mit Dichtungslack überzogen und die Pumpen in Betrieb gesetzt. Bei dichter Apparatur war das Vakuum nach etwa 12 Stunden so gut (etwa  $1 \cdot 10^{-6}$  mm Hg), daß mit den Messungen begonnen werden konnte.

Die ersten Versuche zeigten zunächst, daß ein starkes Erhitzen der Anode eine Verschlechterung des Vakuums und

damit eine Streuung der Ionen zur Folge hatte, was sich dadurch bemerkbar machte, daß der Auffänger auch ohne Kondensatorspannung Aufladungen erhielt. Es wurden daher die Pumpen während der Versuche in Betrieb gelassen.

Mit den einzelnen Anoden konnte insgesamt 20—30 Stunden gearbeitet werden, nach dieser Zeit gelangten keine Ionen mehr in den Kondensator. Nach Öffnen der Apparatur zeigte sich, daß das Glas an einigen Stellen infolge des öfteren Erhitzens und Abkühlens von der Anode abgesprungen war. Das Glas selbst war porös, milchig und aufgequollen geworden.

Pyrexglas (81  $\text{SiO}_2$ , 12  $\text{B}_2\text{O}_3$ , 4,5 Alkali, 2,5  $\text{Mn}_2\text{O}_3$  nach Kohlrausch) erwies sich als sehr guter Emittent für Na und

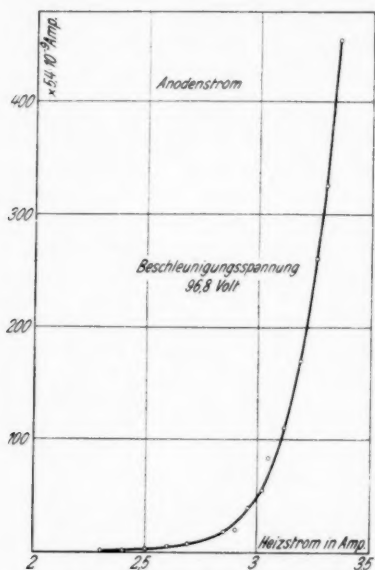


Fig. 6

mehrere Stunden beibehält. Nach dieser Zeit begann er allmählich abzusinken. Die Konstanz des Stromes war besonders bei niedrigen Anodentemperaturen gut. Es wurde daher auch aus diesem Grunde bei den meisten Versuchen mit kleiner Heizstromstärke für die Anode gearbeitet. Eine Aufnahme der Gesamtmission (Fig. 6) in Abhängigkeit von der Heizstrom-

K, während die anderen Bestandteile bei den Versuchstemperaturen wenig oder gar nicht emittiert wurden. Im übrigen war der Zweck der vorliegenden Versuche keineswegs, Analysen von emittierenden Stoffen vorzunehmen, sondern die Gebrauchsfähigkeit des neuen Massenspektrometers an Hand eines gut emittierenden Stoffes zu prüfen, wozu das genannte Glas geeignet erschien. Es wurden auch alle nachfolgend genannten Messungen nur mit den beiden starken Linien  $\text{Na}^{23}$  und  $\text{K}^{39}$  vorgenommen.

Der Gesamtionenstrom nahm zuerst etwas mit der Zeit zu, erreichte aber dann einen konstanten Wert, den er durch

stärk  
einer  
flach  
wur  
durch  
strom  
je na  
Heiz  
für l  
gleich  
haltu  
Mess  
Gesam  
einer  
findl  
mete  
achte  
kung  
gezo

elekt  
lein.  
tors)  
der  
wer  
die  
Mas  
rung  
auch  
stim  
ser  
wur  
den  
zug  
wer  
den  
mel  
digh  
fest  
mul  
Kur  
und  
X v  
Die

stärke der Anode bei einem Vakuum von  $1 \cdot 10^{-6}$  mm Hg und einer Beschleunigungsspannung  $V = 96,8$  Volt zeigt einen zuerst flachen, dann sehr steilen Anstieg des Anodenstromes; Sättigung wurde in den meisten Fällen nicht erreicht, da die Anode früher durchbrannte. Zu erwähnen wäre, daß die Größe des Anodenstromes für eine bestimmte Heizstärke verschieden herauskam, je nachdem man die Kurve mit steigenden oder abnehmenden Heizstromstärken durchlief. Manchmal kam es auch vor, daß für kurze Zeit der Heizstrom absank, während die Emission gleichzeitig zunahm. Aus alledem geht hervor, daß der Konstanthaltung der Temperatur, also des Heizstromes, während der Messungen große Bedeutung zukommt. Daher wurde auch die Gesamtemission mit einem so hoch empfindlichen Galvanometer ständig beobachtet und Schwankungen in Rechnung gezogen.

*Ablenkung im elektrischen Feld allein.* Die Kondensatorspannung, die nach der Theorie eingestellt werden muß, um für die Ionen gleicher Masse gute Fokussierung zu erhalten, kann auch experimentell bestimmt werden. Dieser so ermittelte Wert wurde auch im folgenden den Messungen zugrunde gelegt. Es

werden beim Magnetfeld Null und verkehrt angelegter Kondensatorspannung (Feldrichtung nach innen) gemäß der Formel  $X = 2V \log R_2/R_1$  alle Massen bestimmter Geschwindigkeit gleichzeitig auf den Auffänger gelangen. Wird bei festgehaltenem  $V$  die Kondensatorspannung  $X$  verändert, so muß der Wert von  $X$  für das Maximum der so erhaltenen Kurve dem theoretischen Wert für  $X$  entsprechen. Fig. 7 und 8 zeigen zwei solche Kurven. Aus Fig. 7 ergibt sich ein  $X$  von 10,28 Volt, während aus der Formel 10,20 Volt folgt. Dieser kleine Unterschied kann leicht durch die Abweichungen

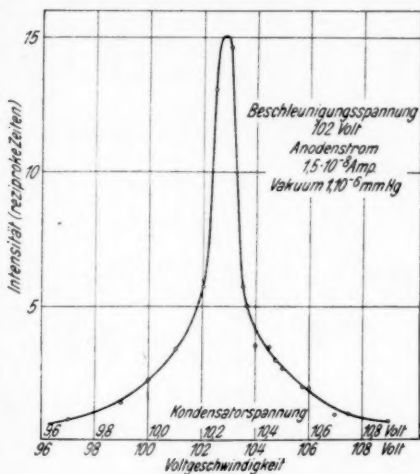


Fig. 7

der wirklichen von den gemessenen Werten der beiden Kondensatorradien  $R_1$  und  $R_2$  hervorgerufen sein, aber auch dadurch, daß die Geschwindigkeit der Ionen nicht genau der im Voltmeter abgelesenen Beschleunigungsspannung entspricht. Die Kurve in Fig. 7 wurde bei einem Vakuum von  $1 \cdot 10^{-6}$  mm Hg aufgenommen und liegt innerhalb einer Variation der Kondensatorspannung von 1 Volt. Unter der Skala der Kondensatorspannung befindet sich eine Voltgeschwindigkeitsskala gemäß

der einfachen Beziehung  $V = 10 X$ .

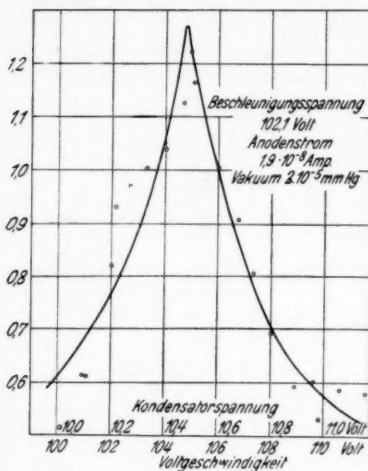


Fig. 8

Punkte dieser Kurve gefundene Intensität war  $5,4 \cdot 10^{-13}$  Amp. (Elektrometerempfindlichkeit 230 partes pro 1 Volt, Kapazität 15,1 cm). Die Gesamtemission betrug  $1,5 \cdot 10^{-8}$  Amp., wovon also  $\frac{1}{10}$  in den Kondensator gelangt. Von diesem Strom gelangte nun wieder nur  $\frac{1}{3000}$  zum Auffänger.

Fig. 8 zeigt eine ähnlich aufgenommene Kurve wie Fig. 7. Es war jedoch bei ihrer Aufnahme das Vakuum nur  $2 \cdot 10^{-5}$  mm Hg. Die Kurve ist bedeutend breiter, der Wert für die günstigste Kondensatorspannung ist 10,48 Volt gegenüber dem theoretischen von 10,21 Volt. Der Anodenstrom betrug  $1,9 \cdot 10^{-8}$  Amp., die höchste Intensität dagegen nur  $4,4 \cdot 10^{-14}$  Amp.

*Ablenkung im elektrischen und magnetischen Felde.* Die ersten Messungen hatten zum Ziele, den Nachweis zu erbringen, wie weit sich die aus der Theorie von Bartky und Dempster

Diese Messung gestattet auch eine Abschätzung desjenigen Teiles der Emission, der zwischen den beiden Blenden verloren geht. Die Breite der emittierenden Anodenfläche war 1,8 mm (als die Apparatur geöffnet wurde, sah man einen Streifen von dieser Breite der Anode gegenüber auf den Spaltbacken abgebildet, der den Anfangsspalt gleichmäßig überdeckte). Nach Abzug der Spaltbreite von 0,16 mm verhält sich der Rest zur Spaltbreite selbst etwa wie 10:1. Die im höchsten

H.  
errec:  
(5) au  
entbe  
für  
dadu  
einm  
absic  
ergeb  
der g

Kurv  
Kone  
auf d  
hat.  
Verh  
Brei  
ideal

wenn

Das  
Weit  
Auf  
Spal  
A

errechneten Beziehungen (1) und (2), bzw. die speziellen (4) und (5) auch experimentell durch dieses erste, noch jeder Verfeinerung entbehrende Massenspektrometer als notwendige Bedingungen für die doppelte Fokussierung erweisen würden. Dies wurde dadurch zu erproben gesucht, daß irgend eine Masse (z. B. Na) einmal bei vorgeschriebenen und dann bei veränderten, also absichtlich verfälschten Feldgrößen aufgenommen wurde.

Obzwar diese Versuche noch keineswegs abgeschlossen sind, ergeben schon die vorhandenen Meßresultate eine Bestätigung der gemachten Erwartungen. So zeigt ein Vergleich der beiden

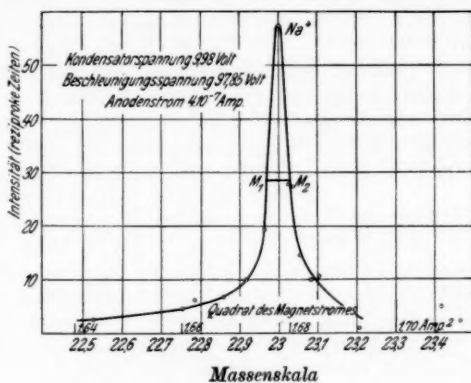


Fig. 9

Kurven in Fig. 9 und Fig. 10, wie durch Veränderung der Kondensatorspannung vom vorgeschriebenen Wert  $X = 9,98$  Volt auf den Wert  $\bar{X} = 0$  sich die Auflösung wesentlich verschlechtert hat. Nach Dempster wird die Auflösung definiert durch das Verhältnis  $dm/m$ , wo  $dm$  die in Masseneinheiten einzusetzende Breite des Maximums in halber Höhe desselben bedeutet. Bei idealer Fokussierung ist

$$\frac{dm}{m} = \frac{s}{\varrho},$$

wenn  $s$  die Schlitzbreite ist. Für die Kurve Fig. 9 wird

$$\varrho \cdot \frac{dm}{m} = 40 \cdot \frac{0,06}{23} = 0,11 \text{ mm.}$$

Das war aber gerade die für diesen Versuch eingestellte Weite  $s$  des Anfangsspalt. Also wurde das Optimum der Auflösung für den gegebenen Radius  $\varrho$  und die eingestellte Spaltbreite bei dieser Kurve erhalten. Bei der Kurve in Fig. 10,

bei deren Aufnahme die beiden Kondensatorplatten geerdet waren, würde sich aus der Strecke  $M_1 M_2$ , die die Weite des Bündels beim Endspalt zu 0,17 mm ergeben. Es hat also das Bündel auf dem Weg durch den Kondensator eine Verbreiterung von etwa 30% erfahren.

Auch alle anderen Messungen zeigen die Abhängigkeit der Auflösung von der Kondensatorspannung. Die Auflösung ist deutlich schlechter, wenn die nach den Formeln (1) und (2) sich ergebende Spannung um einen größeren Betrag verändert

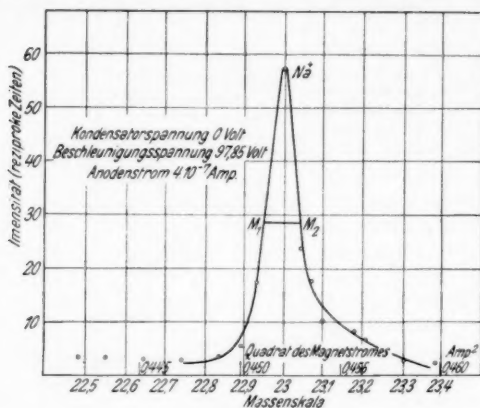


Fig. 10

eingestellt wird. Damit ist gezeigt, daß man die beste Auflösung erhält, wenn die in der Theorie geforderten Beziehungen eingehalten werden. Es tritt dann eben Richtungs- und Geschwindigkeitsfokussierung ein. Daß eine Geschwindigkeitsvariation vorhanden war, ist vor allem durch den Spannungsabfall des Heizstromes längs der Anode bedingt, dann aber auch durch die verschiedenen Austrittsgeschwindigkeiten der Ionen und dadurch, daß die Teilchen, die sich nicht in den von der Theorie betrachteten Ebenen (Kondensatorebenen) bewegen, verschiedene Geschwindigkeitskomponenten in diesen Ebenen besitzen.

Beim Dempsterschen Apparate findet nach  $180^\circ$  im Magnetfeld allein Richtungs-fokussierung statt. Mit dem beschriebenen Apparat kann aber die Fokussierung nur nach  $127^\circ$  untersucht werden. Das heißt, wenn mit dem Magnetfeld allein nach  $127^\circ$  eine schlechtere Auflösung erhalten wird,

so weiß man nicht, welcher Betrag davon der schlechteren Richtungsfokussierung und welcher dem Fehlen einer Geschwindigkeitsfokussierung zuzuschreiben ist. Eine qualitative Aussage könnte aber folgendermaßen gemacht werden: wenn unter gleichen Bedingungen eine Kurve mit der richtigen Kondensatorspannung aufgenommen wird und eine bei geerdeten Platten und dann der Versuch wiederholt wird, indem man der Beschleunigungsspannung von ungefähr 100 Volt eine Wechselfspannung von etwa 2 Volt überlagert, so sollte die Kurve mit der richtigen Kondensatorspannung keine Änderung erfahren, da ja Geschwindigkeitsfokussierung eintritt, während die andere bedeutend breiter sein mußte.

Die Lage der Kurvenspitzen stimmt beim  $\text{Na}^{23}$  und  $\text{K}^{39}$  recht gut mit den gerechneten Werten überein, doch wurde auf eine weitere Untersuchung in dieser Richtung vorläufig kein Gewicht gelegt. Dagegen wurde festgestellt, daß der Bereich von den leichtesten Ionen bis zum Kaliumion durch Variation des Magnetfeldes leicht in einem Meßgang in kleinen Schritten überdeckt werden konnte.

Bei einigen Messungen mit größerer Schlitzbreite traten sowohl beim Natrium als auch beim Kalium Doppelmaxima auf. Da auch die zugehörigen Voltgeschwindigkeitsverteilungskurven solche Doppelmaxima aufwiesen, muß dieser Effekt in der geometrischen Anordnung der Anode, des Schlitzes und des Kondensators liegen. Bei anderen Messungen wieder, bei denen die Entfernung zwischen Anode und Spalt groß war, verschlechterte sich die Auflösung wesentlich.

Da Messungen mit einem neuen verbesserten Spektrometer im Gange sind, wurden die Untersuchungen mit der ersten Apparatur nicht weiter geführt. Über die Ergebnisse der Arbeiten mit der neuen Apparatur soll zur Zeit berichtet werden.

#### IV. Zusammenfassung

Auf Grund einer von Bartky und Dempster gegebenen Theorie wird ein neues Massenspektrometer konstruiert und gebaut, das durch Kombination eines radialen elektrischen und eines homogenen transversalen magnetischen Feldes eine Richtungs- und Geschwindigkeitsfokussierung an derselben Stelle zu erreichen gestattet. Die ganze Apparatur (samt Emissionsquelle und Auffänger) wird zwischen die Vollkreispolschuhe eines Elektromagneten eingebaut. Als Emissionsquelle dient eine sogenannte Siebanode, die durch elektrischen Strom zum Glühen gebracht wird. Die Abtastung der verschiedenen Massen erfolgt durch kontinuierliche Änderung des



Magnetfeldes bei festgehaltener Beschleunigungs- und Kondensatorspannung. Die genaue Messung der Stromveränderungen und damit des Magnetfeldes erfolgt mittels eines Kompensationsapparates.

Es werden mit Hilfe eines beliebigen Emittenten (Hartglas) Kurven einzelner Massen ( $\text{Na}^{23}$ ,  $\text{K}^{39}$ ) aufgenommen und bezüglich der Auflösungskraft der Apparatur untersucht. Bei Einhaltung der durch die Theorie geforderten Beziehungen zwischen den Feld- und Apparaturgrößen, für die Richtungs- und Geschwindigkeitsfokussierung eintreten soll, wird beste Auflösung erhalten, d. h. wenn die Beziehungen nicht eingehalten werden, wird die Auflösung immer schlechter. In einem Falle wurde das Optimum des nach Dempster definierten Auflösungsvermögens für die verwendeten Apparatekonstanten erreicht.

Die Untersuchungen liefern in erster Linie den experimentellen Nachweis der Verwendbarkeit der neuen Methode und der Konstruktion für die Aufnahme von Massenspektrogrammen und geben Anhaltspunkte für den Bau einer verbesserten Apparatur.

Für das wohlwollende Entgegenkommen, das uns der Vorstand des I. Physikalischen Institutes der Universität Wien, Herr Prof. Dr. E. Schweidler, stets bewies, sind wir ihm zu ergebenstem Dank verpflichtet. Ganz besonderen Dank schulden wir Herrn Priv.-Dozent Dr. J. Mattauich, der die Anregung zur vorliegenden Arbeit gab und sie durch seine Erfahrungen und Ratschläge ständig förderte. Auch Herrn cand. phil. F. Schendl sagen wir besten Dank für seine eifrige Mithilfe bei den Messungen.

Wien, I. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 16. April 1933)



# Potentialtheoretische Behandlung des Wehneltzylinders

Von Georg Wendt

(Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Laboratorium  
der Technischen Hochschule Berlin)

(Mit 12 Figuren)

## 1. Einleitung

Die Wirkung des Wehneltzylinders auf den von einer Glühkathode ausgehenden Elektronenstrahl wurde bereits öfters experimentell untersucht. Eine potentialtheoretische Behandlung des Problems liegt meines Wissens nicht vor, was wohl

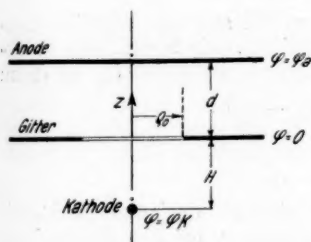


Fig. 1.

Ersatzanordnungen für Elektrodensysteme mit Glühkathode  
und Wehneltelektrode

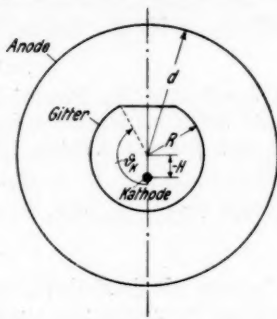


Fig. 2.

in den mathematischen Schwierigkeiten des Problems zu suchen sein wird. Es soll daher im folgenden versucht werden, durch Ersatz des Wehneltzylinders durch geometrische Körper, die der mathematischen Behandlung zugänglicher sind, eine wenigstens einigermaßen auf quantitative Ergebnisse Anspruch erhebende Theorie zu liefern.

Als solche Ersatzanordnungen werden gewählt:

1. Ebene, unbegrenzt ausgedehnte Anode — Kreislochscheibe als Wehneltelektrode (im folgenden Gitter genannt) — punktförmige Kathode auf der Symmetrieachse (Fig. 1).

2. Kugelförmige Anode — Kugelkalotte als Wehnelt-elektrode („Gitter“) — punktförmige Kathode auf der Achse (Fig. 2).

### I. Anordnung mit Kreislochscheibe<sup>1)</sup>

#### 2. Durchgriff

Betrachten wir ein Potentialfeld zwischen irgendwie geformten Elektroden, wobei die eine, die „Anode“, das Potential  $\varphi_a$  aufweise, die andere, das „Gitter“, dagegen mit der Erde verbunden sei ( $\varphi_g = 0$ ). Es sei weiter das in irgendeinem Aufpunkt  $P$  der Anordnung herrschende Potential durch die Gleichung bestimmt:

$$(1) \quad \varphi_P = \lambda \cdot \varphi_a.$$

Hierin hängt der „Anodeneinfluß“  $\lambda$  nur von der geometrischen Anordnung der Elektroden und den Koordinaten des Aufpunktes ab.

Ist insbesondere der Aufpunkt die ladungsfrei gedachte Kathode, so ist das Kathodenpotential:

$$\varphi_K = \lambda \cdot \varphi_a.$$

Da der Begriff des Potentials nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, kann der Kathode, wie üblich, das Potential Null gegeben werden. Das Anodenpotential  $U_a$  ist dann:

$$(2) \quad U_a = \varphi_a - \varphi_K$$

und das Gitterpotential:

$$(3) \quad U_g = -\varphi_K.$$

Definieren wir jetzt den „Durchgriff“ als dasjenige Verhältnis von Gitterspannung zur Anodenspannung, bei dem die Kathode gerade „ladungsfrei“ wird, so ist nach Voraussetzung und nach Gleichung (1):

$$(4) \quad D = -\frac{U_g}{U_a} = \frac{\varphi_K}{\varphi_a - \varphi_K} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}.$$

Da der Anodeneinfluß  $\lambda$  sich zwischen den Werten 0 und +1 bewegt, kann  $D$  alle Werte zwischen Null und Unendlich annehmen.

Um den Durchgriff zu bestimmen, genügt es also, die Potentialverteilung Anode-Gitter (bei fortgedachter Kathode) zu kennen.

1) Vgl. hierzu A. Bolliger, Probleme der Potentialtheorie. Arch. f. Elektrotechn. 6. S. 100, 134. 1918.

Insbesondere ist die Potentialverteilung Platte-Kreislochscheibe bekannt.<sup>1)</sup> Es interessiert nur das Potential auf der Achse:

$$(5) \quad \varphi_+ = \frac{\varphi_a}{d} \left( z + \frac{\varrho_0}{\pi} \left[ 1 - \frac{z}{\varrho_0} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\varrho_0}{z} \right] \right) = \lambda_+ \cdot \varphi_a.$$

Dies ist die Verteilung zwischen der Platte und der Kreislochscheibe. Jenseits der Kreislochscheibe gilt:

$$(6) \quad \varphi_- = \frac{\varphi_a}{d} \cdot \frac{\varrho_0}{\pi} \cdot \left[ 1 - \frac{z}{\varrho_0} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\varrho_0}{z} \right] = \lambda_- \cdot \varphi_a.$$

Die Bezeichnungen gehen aus Fig. 1 hervor.

Die obigen Formeln gelten streng nur für sehr große (unendliche) Entfernung  $d$  zwischen Anode und Gitter. Für  $d \rightarrow 0$  erhält man eine gute Näherung, wenn man die Kreislochscheibe in bekannter Weise an der Anodenplatte spiegelt. Wir erhalten so für das Potential auf der Achse zwischen Anode und Gitter:

$$(7) \quad \varphi_+ = \frac{\varphi_a}{d} \left[ z + \frac{\varrho_0}{\pi} \left( \frac{z+2d}{\varrho_0} \operatorname{arctg} \frac{\varrho_0}{z+2d} - \frac{z}{\varrho_0} \operatorname{arctg} \frac{\varrho_0}{z} \right) \right] = \lambda_+ \varphi_a$$

und jenseits der Kreislochscheibe:

$$(8) \quad \varphi_- = \frac{\varphi_a}{d} \cdot \frac{\varrho_0}{\pi} \cdot \left[ \frac{z+2d}{\varrho_0} \operatorname{arctg} \frac{\varrho_0}{z+2d} - \frac{z}{\varrho_0} \operatorname{arctg} \frac{\varrho_0}{z} \right] = \lambda_- \cdot \varphi_a.$$

Die sich aus diesen Gleichungen ergebenden Werte des Anodeneinflusses  $\lambda$  sind in Fig. 3 aufgetragen. Zur Orientierung sind auch die Werte für den Durchgriff nach Gl. (4) in einer besonderen Skala daneben gestellt.

### 3. Potentialverteilung

Die Potentialverteilung unserer Anordnung Platte-Kreislochscheibe-Quellpunkt erhalten wir durch Überlagerung zweier Potentialfelder:

1. Der Potentialverteilung der Anordnung: Ebene-Kreislochscheibe.

2. Der Anordnung: Kreislochscheibe-Quellpunkt.

Das Potentialfeld der unter 1. genannten Anordnung ist bereits bekannt<sup>2)</sup>, von der zweiten Anordnung kennt man die Verteilung der durch die Quelle  $Q$  (Fig. 4) auf der Kreislochscheibe influenzierten Ladung<sup>3)</sup>:

1) A. Bolliger, a. a. O.

2) A. Bolliger, a. a. O.; F. Ollendorff, „Potentialfelder“, S. 296.

3) Desgl. S. 376.

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma = -\frac{Q}{2\pi^2 H^2} \cdot \left[ \frac{H^2 \varrho_0}{(\varrho^2 + H^2) \sqrt{\varrho^2 - \varrho_0^2}} \right. \\ \left. + \left( \frac{H}{\sqrt{\varrho^2 + H^2}} \right)^3 \operatorname{arctg} \left( \frac{H}{\varrho_0} \cdot \sqrt{\frac{\varrho^2 - \varrho_0^2}{\varrho^2 + H^2}} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

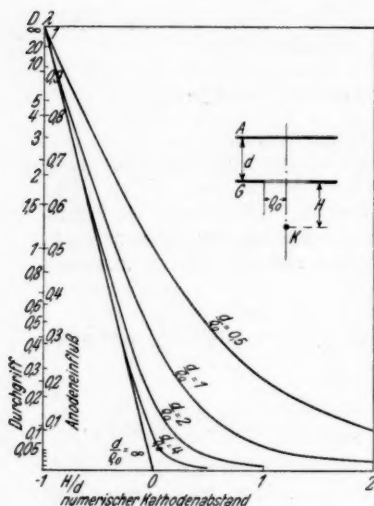


Fig. 3

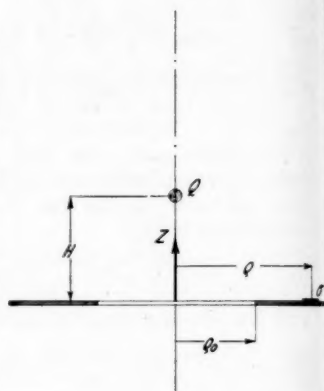


Fig. 4

Die Bezeichnungen gehen aus Fig. 4 hervor. Gl. (9) gilt nur für  $\varrho > \varrho_0$ , für  $\varrho < \varrho_0$  ist  $\sigma \equiv 0$ . Einheitlich für alle  $\varrho$  können wir mit Hilfe des Fourierschen Integralsatzes schreiben<sup>1)</sup>:

$$(10) \quad \sigma(\varrho) = \int_0^\infty J_0(\lambda \varrho) \lambda d\lambda \int_{\varrho_0}^\infty \sigma(v) J_0(\lambda v) v dv.$$

$[J_0(\lambda v)$  bedeutet die Besselsche Funktion nullter Ordnung vom Argument  $\lambda v$ ].

Das durch diese Ladung verursachte Sekundärpotential setzen wir in folgender Form an:

$$(11) \quad \varphi_s = \int_0^\infty J_0(\lambda \varrho) \cdot e^{\mp \lambda z} \cdot g(\lambda) d\lambda; \quad (z \geq 0).$$

<sup>1)</sup> Hier und im folgenden bedeutet  $\lambda$  natürlich eine Integrationsvariable, nicht den Anodeneinfluß.

Die zunächst noch unbekannte Gewichtsfunktion  $g(\lambda)$  bestimmen wir aus der nach (11) ermittelten Oberflächenladung:

$$(12) \quad \sigma = \mp \Delta \varepsilon \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = \Delta \varepsilon \int_0^{\infty} \lambda \cdot g(\lambda) \cdot J_0(\lambda \varrho) \cdot d\lambda,$$

durch Vergleich mit Gl. (10) und erhalten:

$$(13) \quad g(\lambda) = \frac{1}{\Delta \varepsilon} \cdot \int_{\varrho_0}^{\infty} \sigma(v) J_0(\lambda v) v dv.$$

Mit der Integraldarstellung<sup>1)</sup>:

$$(14) \quad J_0(\lambda v) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_v^{\infty} \frac{\sin \lambda \xi}{\sqrt{\xi^2 - v^2}} d\xi$$

wird aus (13) durch Vertauschung der Integrationsfolge:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} g(\lambda) &= \frac{2}{\Delta \varepsilon \pi} \int_{\varrho_0}^{\infty} \sigma(v) v dv \int_v^{\infty} \frac{\sin \lambda \xi}{\sqrt{\xi^2 - v^2}} d\xi \\ &= \frac{2}{\pi \Delta \varepsilon} \cdot \int_{\varrho_0}^{\infty} \sin \lambda \xi d\xi \int_{\varrho_0}^{\xi} \frac{\sigma(v) v dv}{\sqrt{\xi^2 - v^2}} \\ &= \frac{2}{\pi \Delta \varepsilon} \cdot \int_{\varrho_0}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi. \end{aligned} \right.$$

Das Integral  $f(\xi)$  ist jetzt für die in Gl. (9) angegebene Ladungsverteilung zu berechnen. Wir erhalten mit zwei weiter unten definierten Integralen  $J_1$  und  $J_2$ :

$$(16) \quad f(\xi) = -\frac{Q}{2\pi^2} [\varrho_0 J_1 + H J_2].$$

Das erste Integral:

$$(17) \quad J_1 = \int_{\varrho_0}^{\xi} \frac{v dv}{\sqrt{\xi^2 - v^2} (v^2 + H^2) \sqrt{v^2 - \varrho_0^2}}$$

läßt sich in:

$$(18) \quad J_1 = \frac{1}{6a} \left[ \oint \frac{d\beta}{a + i b \sin \beta} + \oint \frac{d\beta}{a - i b \sin \beta} \right]$$

überführen, worin

$$a = \sqrt{H^2 + \varrho_0^2},$$

$$b = \sqrt{\xi^2 - \varrho_0^2}$$

ist. Die Integration, die auf dem Rande des Einheitskreises auszuführen ist, liefert:

1) Riemann-Weber, Differentialgleichungen, Bd. I. S. 182.

$$(19) \quad J_1 = \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{H^2 + \varrho_0^2} \cdot \sqrt{H^2 + \xi^2}}.$$

Zur Lösung des zweiten Integrals von (16):

$$(20) \quad J_2 = \int_{\varrho_0}^{\xi} \frac{\nu d\nu}{\sqrt{\xi^2 - \nu^2} (\nu^2 + H^2)^{1/2}} = \operatorname{arctg} \frac{H}{\varrho_0} \cdot \sqrt{\frac{\nu^2 - \varrho_0^2}{\nu^2 + H^2}}$$

beachten wir:

$$(21) \quad \int \frac{\nu d\nu}{\sqrt{\xi^2 - \nu^2} (\nu^2 + H^2)^{1/2}} = \frac{\sqrt{\xi^2 - \nu^2}}{(\xi^2 - H^2) \sqrt{H^2 + \nu^2}}$$

und integrieren (20) partikulär:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} J_2 &= - \frac{\sqrt{\xi^2 - \nu^2}}{(\xi^2 + H^2) \sqrt{H^2 + \nu^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{H}{\varrho_0} \sqrt{\frac{\nu^2 - \varrho_0^2}{\nu^2 + H^2}} \right) \Big|_{\varrho_0}^{\xi} \\ &+ \frac{1}{\xi^2 + H^2} \int_{\varrho_0}^{\infty} \frac{d\nu \sqrt{\xi^2 - \nu^2}}{\sqrt{H^2 + \nu^2}} \cdot \frac{H}{\varrho_0} \cdot \frac{\varrho_0^2}{\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu^2 - \varrho_0^2} \cdot \sqrt{H^2 + \nu^2}} \\ &= \frac{H \varrho_0}{\xi^2 + H^2} \int_{\varrho_0}^{\xi} \frac{d\nu \sqrt{\xi^2 - \nu^2}}{\nu \sqrt{\nu^2 - \varrho_0^2} (H^2 + \nu^2)}. \end{aligned} \right.$$

Dies läßt sich analog (18) in ein Konturintegral überführen; wir erhalten:

$$(23) \quad J_2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{H} \cdot \left[ \frac{\xi}{\xi^2 + H^2} - \frac{\varrho_0}{\sqrt{H^2 + \xi^2} \cdot \sqrt{H^2 + \varrho_0^2}} \right].$$

Setzen wir nun (19) und (23) in (16) ein, so wird:

$$(24) \quad f(\xi) = - \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{\xi}{\xi^2 + H^2}.$$

Mit Berücksichtigung von (15) und (11) finden wir für das Sekundärpotential:

$$(25) \quad \varphi_s = - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{Q}{4\pi d s} \cdot \int_0^{\infty} J_0(\lambda \varrho) e^{-\lambda z} d\lambda \int_{\varrho_0}^{\infty} \sin \lambda \xi \frac{\xi d\xi}{\xi^2 + H^2}.$$

Wir führen zunächst die Integration nach  $\lambda$  aus:

$$(26) \quad \int_0^{\infty} J_0(\lambda \varrho) e^{-\lambda z} \sin \lambda \xi d\lambda = \Im \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + (z - i\xi)^2}},$$

so daß wird:

$$(27) \quad \varphi_s = - \frac{Q}{2\pi^2 d s} \cdot \Im \int_{\varrho_0}^{\infty} \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 + H^2) \sqrt{\varrho^2 + (z - i\xi)^2}}.$$

Durch Partialbruchzerlegung erhalten wir weiter:

$$(28) \quad \left\{ \varphi_s = -\frac{Q}{4\pi^2 A \varepsilon} \cdot \Im \left\{ \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + iH) \sqrt{q^2 + (z - i\xi)^2}} + \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi - iH) \sqrt{q^2 + (z - i\xi)^2}} \right\} \right.$$

Die Lösung der beiden Integrale ist, wie man leicht durch Differentiation erkennt:

$$(29) \quad \left\{ \varphi_s = -\frac{Q}{4\pi^2 A \varepsilon} \cdot \Im \left[ \frac{1}{\sqrt{(z+H)^2 + q^2}} \Re \coth \left[ \frac{z(z+H) + q^2 - i(z+H)\xi}{q(iH-\xi)} \right] + \frac{1}{\sqrt{(z-H)^2 + q^2}} \cdot \Re \coth \left[ \frac{z(z-H) + q^2 - i(z-H)\xi}{-q(iH+\xi)} \right] \right]_{\xi=\varepsilon_0}^{\infty} \right.$$

#### 4. Potentialverlauf längs der Achse

Die Kenntnis der Potentialverteilung um eine Glühkathode interessiert in erster Linie zum Zweck der Bahnbestimmung der austretenden Elektronen. Beschränkt man sich dabei nur auf achsennahe Elektronen, was ja die meisten Elektronen der Kathodenstrahlbündel in praktisch ausgeführten Geräten sind, so kann man das Potential in der Umgebung der Achse entwickeln.<sup>1)</sup>

$$(30) \quad \varphi = -\int \mathfrak{E}_z(z) dz + \frac{\left(\frac{1}{2}q\right)^2}{(1!)^2} \cdot \frac{d\mathfrak{E}_z}{dz} - \frac{\left(\frac{1}{2}q\right)^4}{(2!)^2} \cdot \frac{d^2\mathfrak{E}_z}{dz^2} + \dots$$

Kennen wir also die Potentialverteilung  $\varphi_z(z)$  längs der Achse, so ist das Potential in ihrer nächsten Umgebung näherungsweise gegeben durch:

$$(30a) \quad \varphi = \varphi_z(z) - \frac{\left(\frac{1}{2}q\right)^2}{(1!)^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial z^2}.$$

Das Primärpotential längs der Achse

$$(31) \quad \varphi_{ps} = -\frac{Q}{4\pi A \varepsilon} \cdot \frac{1}{|z-H|}$$

ist bekannt, das Sekundärpotential läßt sich durch den Grenzübergang  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_s$  leicht ermitteln. Achtet man auf die Vieldeutigkeit der zyklometrischen Funktionen, so ergibt sich hierbei:

1) z. B. H. Busch, Arch. f. El. 18. S. 583. 1927; Ann. d. Phys. 81. S. 974. 1926; F. Ollendorff, Potentialfelder S. 351.

$$(32) \left\{ \varphi_{ss} = \frac{Q}{4\pi^2 \Delta s} \left[ \frac{\frac{\pi}{2}}{|z+H|} + \frac{\frac{\pi}{2}}{|z-H|} + \frac{1}{|z+H|} \arctg \frac{Hz - \varphi_0^2}{\varphi_0 |z+H|} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{|z-H|} \arctg \frac{Hz + \varphi_0^2}{\varphi_0 |z-H|} \right] \right\}.$$

Das resultierende Potential (längs der Achse) der Anordnung (Fig. 4) ergibt sich durch Superposition von (31) und (32). Um das Potential unserer ursprünglichen Anordnung (Fig. 1) zu erhalten, ist außerdem noch das Feld Platte-Kreislochscheibe [Gl. (5) bzw. (6)] zu überlagern. Das Ergebnis lautet für den Raum zwischen Anode und Gitter:

$$(33) \left\{ \varphi_s(z) = \frac{\varphi_a}{d} \left\{ z + \frac{\varphi_0}{\pi} \left[ z - \frac{z}{\varphi_0} \arctg \frac{\varphi_0}{z} \right] \right\} \right. \\ \left. + \frac{Q}{4\pi^2 \Delta s} \left[ \frac{\frac{\pi}{2}}{|z+H|} - \frac{\frac{\pi}{2}}{|z-H|} + \frac{1}{|z+H|} \arctg \frac{Hz - \varphi_0^2}{\varphi_0 |z+H|} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{|z-H|} \arctg \frac{Hz + \varphi_0^2}{\varphi_0 |z-H|} \right] \right\}.$$

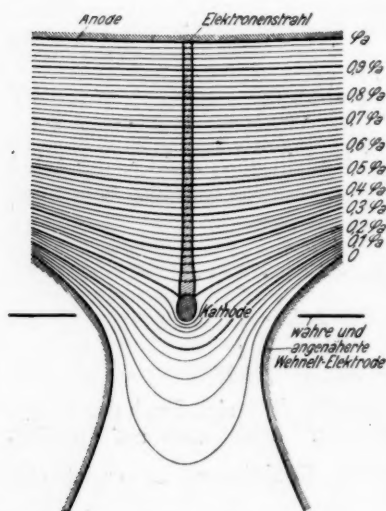


Fig. 5. Konzentration eines Elektronenstrahls durch eine Wehnelt-Elektrode

Für den Raum diesseits des Gitters fällt der Summand  $\varphi_a \cdot \frac{z}{d}$  in (33) fort.

##### 5. Beispiel einer Potentialverteilung mit eingezeichneten Elektronenbahnen

Um zu zeigen, inwieweit die Randwerte dieser Näherungsverteilung mit den wahren übereinstimmen, ist in Fig. 5 diese Verteilung für den einfachen Fall  $H = 0$  gezeichnet. Da jedoch die Entwicklung des Primärpotentials:

$$(34) \left\{ \varphi_P = - \frac{Q}{4\pi \Delta s} \cdot \frac{1}{\sqrt{z^2 + \varphi^2}} \right\}$$



nach (30a) in der Ebene  $z = 0$  eine Unstetigkeitsstelle besitzt, wurden nur die Sekundärpotentiale (32) und (5) nach (30a) entwickelt und dem ganzen die einfache Primärverteilung (34)

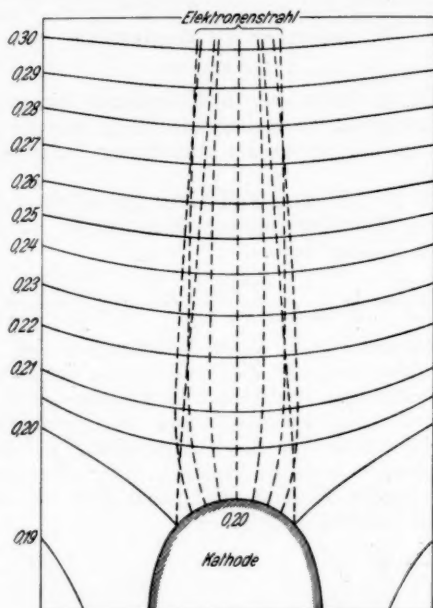


Fig. 6. Elektronenbahnen bei einer Kreislochscheibe als Wehnelt Elektrode mit einer Vorspannung von  $U_g = -U_a$ .

überlagert. Der Wert für  $Q$  wurde dabei ziemlich niedrig gewählt, so daß die Wehnelt Elektrodenvorspannung kurz vor dem „Sperrwert“ steht.

Die in Fig. 6 genauer gezeichneten Elektronenbahnen wurden graphisch ermittelt, indem zwischen je zwei Äquipotentiallinien von der Potentialdifferenz  $\Delta \varphi$  eine äquivalente elektrostatische Doppelschicht angenommen und an jeder dieser Doppelschichten das Snelliussche Gesetz der Elektronenoptik:

$$(35) \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \sqrt{1 + \frac{\Delta \varphi}{\varphi_a}}$$

angewendet wurde. Es bedeuten hier:  $\alpha_1$  — den Austritts-,  $\alpha_2$  — den Einfallswinkel des Strahls,  $\varphi_a$  — die bereits durch-

flogene Potentialdifferenz. Der Einfluß der Raumladungen wurde vernachlässigt.

Die Konzentrationswirkung der Wehnelt Elektrode ist sehr gut zu erkennen.

## II. Anordnung mit Kugelkalotte

### 6. Durchgriff

Nach den Ausführungen in 2. brauchen wir zur Bestimmung des Durchgriffs im vorliegenden Fall nur die Potentialverteilung längs der Achse der Anordnung Kalotte-Hüllkugel zu kennen.

Beginnen wir mit dem Fall einer unendlich großen Hüllkugel. Da die Ladungsverteilung einer frei im Raum befindlichen Kalotte bekannt ist<sup>1)</sup>:

$$(36) \quad \sigma = \frac{q_{\text{kal}} \cdot 2 \Delta}{\pi R} \left[ \sqrt{\frac{1 + \cos \vartheta_K}{\cos \vartheta_P - \cos \vartheta_K}} + \arctg \sqrt{\frac{\cos \vartheta_P - \cos \vartheta_K}{1 + \cos \vartheta_K}} \right]$$

(Bezeichnungen aus Fig. 7;  $q_{\text{kal}}$  = Kalottenpotential), läßt sich durch Integration über alle Flächenelemente der Kalotte auch die Potentialverteilung ermitteln. In genügender Entfernung werden dann die Äquipotentialflächen annähernd zu Kugeln.

Soll insbesondere die Potentialverteilung auf der Achse ermittelt werden, so sind die Elemente einer „Elementarkugelzone“ von gleichem Einfluß, und man hat nur über den Winkel  $\vartheta_P$  zu integrieren (Fig. 7):

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4 \pi \Delta} \int \frac{\sigma df}{r} \\ &= \frac{R}{\pi} \cdot q_{\text{kal}} \int_0^{\vartheta_K} \frac{\sqrt{\frac{1 + \cos \vartheta_K}{\cos \vartheta_P - \cos \vartheta_K}} + \arctg \sqrt{\frac{\cos \vartheta_P - \cos \vartheta_K}{1 + \cos \vartheta_K}}}{\sqrt{R^2 + z^2 + 2zR \cos \vartheta_P}} \\ &\quad \cdot \sin \vartheta_P \cdot d\vartheta_P. \end{aligned} \right.$$

Nun soll aber nach 2. die Anode das Potential  $\varphi_a$  haben, die Kalotte dagegen das Potential Null. Wir senken also das Potential um  $q_{\text{kal}} = -\varphi_a$  und erhalten:

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \varphi_a \left[ 1 - \frac{1}{z\pi} \left( |R + z| \frac{\vartheta_K}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - |R - z| \arctg \left\{ \tg \frac{\vartheta_K}{2} \cdot \frac{R - z}{R + z} \right\} \right) \right] = \varphi_a \cdot \lambda_{\infty}. \end{aligned} \right.$$

1) Z. B. Maxwell-Weinstein, *El. u. Magn.* Bd. I, S. 288 ff. Berlin Springer 1883; auch F. Ollendorff, *Potentialfelder*, S. 371.

Dieser Wert  $\lambda_\infty$  mit der entsprechenden Skala für den Durchgriff  $D_\infty$  [nach Gl. (4)] ist in Abhängigkeit von der Lage der Kathode mit  $\vartheta_K$  als Parameter in Fig. 8 aufgetragen.

Um den endlichen Abstand der Anode zu berücksichtigen, nehmen wir an, daß die Äquipotentialfläche, die durch den

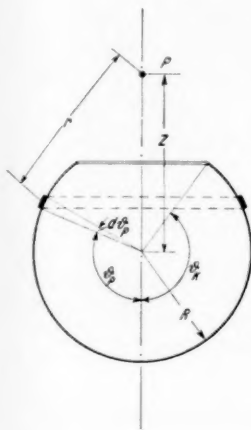
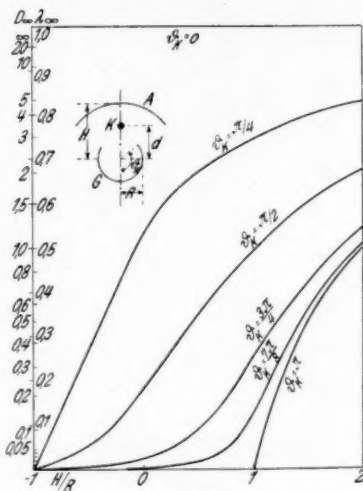


Fig. 7


Fig. 8<sup>1)</sup>

Punkt  $z = d$  geht, die Anode darstellt. Das Potential auf der Achse ist dann:

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \varphi_a \cdot \frac{1 - \frac{1}{z\pi} \left( |R+z| \frac{\vartheta_K}{2} - |R-z| \arctg \left\{ \tg \frac{\vartheta_K}{2} \frac{R-z}{R+z} \right\} \right)}{1 - \frac{1}{d\pi} \left( |R+d| \frac{\vartheta_K}{2} - |R-d| \arctg \left\{ \tg \frac{\vartheta_K}{2} \frac{R-d}{R+d} \right\} \right)} \\ &= \varphi_a \frac{\lambda_\infty}{F} = \varphi_a \cdot \lambda. \end{aligned} \right.$$

Der Reduktionsfaktor  $F$ , durch den  $\lambda_\infty$  zu dividieren ist, damit man den wahren Anodeneinfluß  $\lambda$  erhält, ist in Fig. 9 in Abhängigkeit vom „Anodenhalmesser“  $d$  und mit  $\vartheta_K$  als Parameter aufgetragen.

1) In der Skizze der Anordnung sind die Buchstaben  $H$  und  $d$  zu vertauschen. In Fig. 2 sind die Bezeichnungen richtig eingetragen.

## 7. Potentialverteilung

Aus dem nun bekannten Feld einer frei im Raum befindlichen Kalotte [Gl. (37)] kann mittels der Gesetze der räumlichen Spiegelung<sup>1)</sup> das Sekundärpotential der durch die

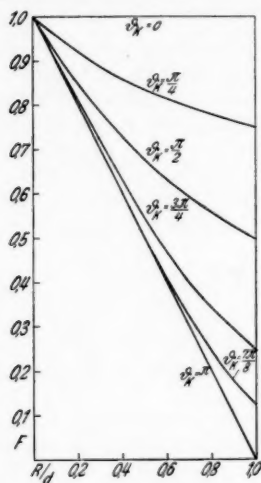


Fig. 9

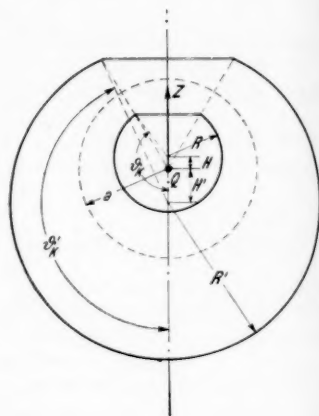


Fig. 10

Spiegelung entstandenen neuen Kalotte, welche von einer im Inversionszentrum befindlichen Ladung  $Q$  influenziert und zur Erde abgeleitet ist, gefunden werden.

Den Koordinatenursprung legen wir jetzt in das Inversionszentrum (Fig. 10). Die Werte der freien Kalotte sollen „gestrichen“ angegeben werden, die „ungestrichenen“ Werte seien diejenigen der influenzierten Kalotte.

Mit den Bezeichnungen der Zeichnung gilt nach dem Spiegelungsgesetz:

$$(40) \quad \frac{H'}{H} = \frac{R'}{R} = \frac{a^2}{H^2 - R^2},$$

$$(41) \quad -\frac{R' \cos \vartheta'_K + H'}{R \cos \vartheta_K - H} = \frac{R' \sin \vartheta'_K}{R \sin \vartheta_K}.$$

Da die aus der letzten Gleichung folgende explizite Darstellung von  $\vartheta_K = f(\vartheta'_K)$  recht verwickelt wird, wird auch bei der in-

1) Z. B. F. Ollendorff, Potentialfelder, S. 355.

fluenzierten Kalotte weiter mit dem Winkel  $\vartheta'_K$  gearbeitet. Sein Wert, der „wirksame Kalottenwinkel“, kann als Funktion des „wahren Kalottenwinkels“  $\vartheta_K$  aus Fig. 11 abgelesen werden.

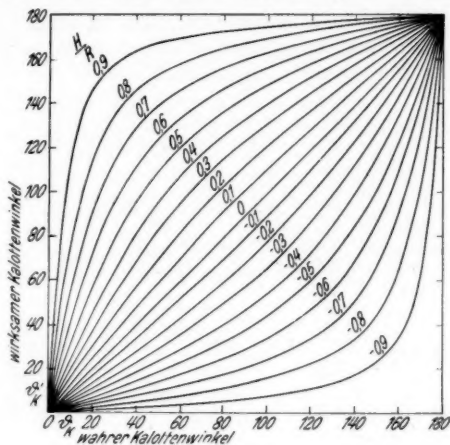


Fig. 11

Die Potentialverteilung der freien Kalotte [Gl. (37)] schreibt sich in den neuen Koordinaten:

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi' &= \frac{\varphi'_{\text{kal.}}}{\pi} \cdot \frac{1}{H' - z'} \cdot \left[ \left| R' + H' - z' \right| \frac{\vartheta'_K}{2} \right. \\ &\quad \left. - \left| R' - H' + z' \right| \arctg \left\{ \operatorname{tg} \frac{\vartheta'_K}{2} \cdot \left| \frac{R' - H' + z'}{R' + H' - z'} \right| \right\} \right]. \end{aligned} \right.$$

Das Sekundärfeld der influenzierten und zur Erde abgeleiteten Kalotte ist:

$$(43) \quad \varphi_s = - \frac{a}{|z|} \cdot \varphi'.$$

Führen wir noch den Begriff der Zentralleitung ein:

$$(44) \quad Q = 4 \pi \Delta \cdot a \cdot \varphi'_{\text{kal.}}$$

und legen den Koordinatenursprung in den Mittelpunkt der Kugel der influenzierten Kalotte, so ist:

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_s &= - \frac{Q}{4 \pi^2 \Delta} \cdot \frac{1}{|H - z|} \cdot \frac{1}{H - \frac{H^2 - R^2}{H - z}} \cdot \left[ \left| R + H - \frac{R^2 - H^2}{H - z} \right| \frac{\vartheta'_K}{2} \right. \\ &\quad \left. - \left| R - H + \frac{H^2 - R^2}{H - z} \right| \arctg \left\{ \operatorname{tg} \frac{\vartheta'_K}{2} \cdot \left| \frac{R H - R z + H z - R^2}{R H - R z - H z + R^2} \right| \right\} \right]. \end{aligned} \right.$$

Addieren wir noch hierzu das Primärpotential der Zentralquelle

$$(46) \quad \varphi_P = \frac{Q}{4\pi d} \cdot \frac{1}{|H-z|}$$

und das Potentialfeld der Kalotte, Gl. (39), so erhalten wir die gesuchte Potentialverteilung der Elektrodenanordnung nach Fig. 2 auf der Achse, wobei die Gestalt der Anode durch das auf S. 455 Gesagte festgelegt ist:

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \varphi_a \cdot \frac{1 - \frac{1}{z\pi} \left( \left| R+z \right| \frac{\vartheta_K}{2} - \left| R-z \right| \arctg \left\{ \operatorname{tg} \frac{\vartheta_K}{2} \left| \frac{R-z}{R+z} \right| \right\} \right)}{1 - \frac{1}{d\pi} \left( \left| R+d \right| \frac{\vartheta_K}{2} - \left| R-d \right| \arctg \left\{ \operatorname{tg} \frac{\vartheta_K}{2} \left| \frac{R-d}{R+d} \right| \right\} \right)} \\ &+ \frac{Q}{4\pi d} \cdot \frac{1}{|H-z|} \left\{ 1 - \frac{1}{H - \frac{H^2-R^2}{H-z}} \cdot \left[ \left| R+H - \frac{R^2-H^2}{H-z} \right| \frac{\vartheta'_K}{2} \right. \right. \\ &- \left. \left. \left| R-H + \frac{H^2-R^2}{H+z} \right| \arctg \left\{ \operatorname{tg} \frac{\vartheta'_K}{2} \left| \frac{RH-Rz+Hz-R^2}{RH-Rz-Hz+R^2} \right| \right\} \right] \right\} \\ &- \frac{Q}{4\pi d} \cdot \frac{1}{|H-d|} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{H - \frac{H^2-R^2}{H-d}} \cdot \left[ \left| R+H - \frac{R^2-H^2}{H+d} \right| \frac{\vartheta'_K}{2} \right. \right. \\ &- \left. \left. \left| R-H + \frac{H^2-R^2}{H+d} \right| \arctg \left\{ \operatorname{tg} \frac{\vartheta'_K}{2} \cdot \left| \frac{RH-Rd+Hd-R^2}{RH-Rd-Hd+R^2} \right| \right\} \right] \right\} \end{aligned} \right\}$$

$\vartheta'_K$  ist hierin, wie erwähnt, der „wirksame Kalottenwinkel“, der in Abhängigkeit vom „wahren Kalottenwinkel“ der Fig. 11 zu entnehmen ist. Der letzte der drei Summanden der Gl. (47) kann für die meisten praktischen Anordnungen (für gegen die Entfernung Kathode–Anode kleine Kathodenabmessungen) vernachlässigt werden.

Nach (30) erhält man hierauf mit (47) die Potentialverteilung in der Umgebung der Symmetrieachse.

#### 8. Beispiel einer Potentialverteilung mit eingezeichneten Elektronenbahnen

Wie in 5. wurde auch hier für einen bestimmten Fall

$$(H=0; \quad \vartheta'_K = \vartheta_K = \arctg 2,5 = 0,62\pi;$$

$$\frac{Q}{4\pi d} \cdot \frac{1}{R} = 0,02 \varphi_a; \quad \frac{d}{R} = 1,8)$$

die mit (47) nach (30a) gefundene Verteilung berechnet und in Fig. 12 aufgetragen. Wie man erkennt, stimmt die durch diese Näherung gegebene Begrenzung der Kalotte mit der tat-

Wendt

sächlich  
wie i  
Konze

Fig. 12

wählt  
weitereine  
so en  
der  
stimm  
Für  
einer  
die  
Elekt

Elekt

dort  
spre

sächlichen ganz gut überein. Die Elektronenbahnen, die genau wie in 5. ermittelt wurden, zeigen eine etwas schwächere Konzentrationswirkung als dort, da hier die Ladung  $Q$  so ge-

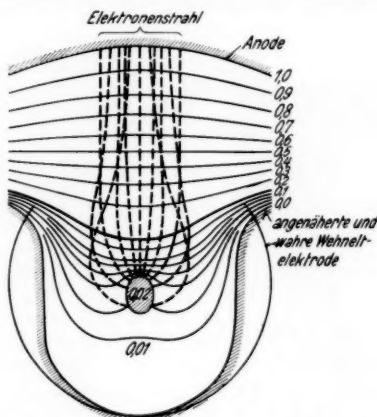


Fig. 12. Konzentration eines Elektronenstrahls mittels einer Kugelkalotte wählt wurde, daß die Vorspannung der Wehneltelektrode weiter vom „Sperrwert“ entfernt war.

### 9. Zusammenfassung

Der Wehneltzylinder in Kathodenstrahlröhren wurde durch eine Kreislochscheibe bzw. Kugelkalotte angenähert. Für die so entstehenden Elektrodensysteme nach Figg. 1 und 2 wurde der Durchgriff der Anode durch die Wehneltelektroden bestimmt und die Potentialverteilung auf der Achse ermittelt. Für die Umgebung der Achse kann dann das Potentialfeld in einer Reihenentwicklung dargestellt werden. Zum Schluß wurde die Konzentrationswirkung der Wehneltelektroden auf den Elektronenstrahl demonstriert.

Über experimentelle Untersuchungen der hier behandelten Elektrodensysteme soll demnächst berichtet werden.

Zum Schluß möchte ich nicht verfehlen, Herrn Dr. Ollendorff für Anregung und Hilfe meinen besten Dank auszusprechen.

Berlin.

(Eingegangen 7. April 1933)

**Beitrag zur Kenntnis der Kurzschlußfunken****Von W. Ende**

(Aus dem Forschungsinstitut der AEG.)

(Mit 3 Figuren)

Der Vorgang beim Kurzschließen elektrischer Spannungen durch kurze dünne Metalldrähte, der entsprechend der visuellen Wahrnehmung die Bezeichnung „Kurzschlußfunken“ führt, ist mehrfach auf seinen zeitlichen Ablauf untersucht worden. Aus letzter Zeit liegt eine Arbeit von Kleen<sup>1)</sup> vor, der eine Deformation des beim Stromdurchgang verflüssigten Drahtes zu einer Art Perlschnur (Unduloid) mit dem Endzustand einer Reihe von Kügelchen feststellen konnte. Ihm gelang es auch durch geeignete Begrenzung der Stromstärke, diese Unduloidbildung in verschiedenen Phasen aufzuhalten und damit der Messung zugänglich zu machen.

Da dieser Vorgang sich zur Aufnahme mit dem Zeitdehner<sup>2)</sup> unseres Institutes sehr gut eignet und da das häufig beobachtete Auftreten größerer Metallkügelchen noch nicht geklärt ist, schienen mir einige Aufnahmen von Interesse zu sein.

Herr Kleen war so freundlich, mir die näheren Versuchsbedingungen mitzuteilen. Ein Silberdraht von 0,2 mm Durchmesser wurde als Verbindungsdraht zwischen dickeren eisernen Elektroden waagrecht ausgespannt und verlötet. Beim Anlegen von Gleichspannung unter Begrenzung des Stromes durch einen Widerstand zersprüht der Silberdraht unter knallartigem Geräusch und kurzdauernder Lichterscheinung in Kügelchen verschiedener Größe.

Dieser Vorgang wurde mit dem Zeitdehner im durchfallenden Lichte einer 30-Amp.-Spiegelbogenlampe aufgenommen. Die Beleuchtung war so gewählt, daß sich der Silberdraht

1) W. Kleen, *Ann. d. Phys.* [5] 11. S. 579. 1931.

2) W. Ende, *Ztschr. f. techn. Phys.* 10. S. 483. 1932; *VDJ-Ztschr.* 77. S. 10. 1933.



vom Hintergrunde dunkel, der entstehende Lichtbogen dagegen hell abhebt.

Die Ergebnisse seien an Hand der Figg. 1—3 besprochen. Die Zahlen neben den Einzelbildern geben die Zeit in Milli-

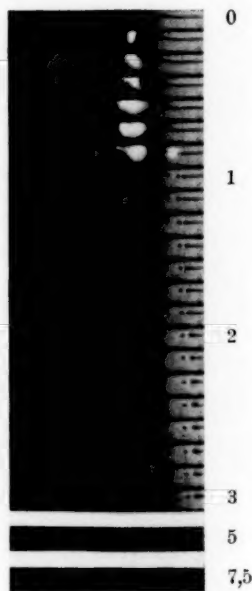
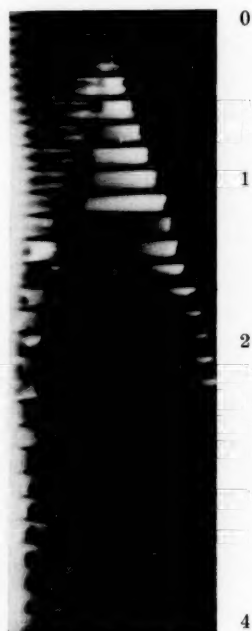


Fig. 1.  
Filmbilder aus Aufnahmen von Kurzschlußfunken.

Silberdraht 7 mm lang;  
0,2 mm Durchmesser; 80 Volt;  
10 Ohm Vorschaltwiderstand;  
Aufnahme mit 6600 Bildern/sec.

Fig. 2.

Silberdraht 30 mm lang;  
0,2 mm Durchmesser; 80 Volt;  
5 Ohm Vorschaltwiderstand;  
Aufnahme mit 6730 Bildern/sec.

sekunden an. Im oberen Teil der Figuren sind alle aufgenommenen Bilder, für die Vorgänge nach 3—4 msec ist dagegen nur eine Auswahl wiedergegeben. (Gekennzeichnet durch größeren Bildabstand.)

Fig. 1: Der Draht brennt in der Mitte zwischen den Elektroden durch und schmilzt in Richtung auf die Elektroden zusammen. Der dabei entstandene Lichtbogen steigt schnell hoch und

gerät so aus dem Bildfeld. Doch lassen sich seine Ansatzstellen am Draht beobachten. Sie sind länger als 8 msec zu sehen.

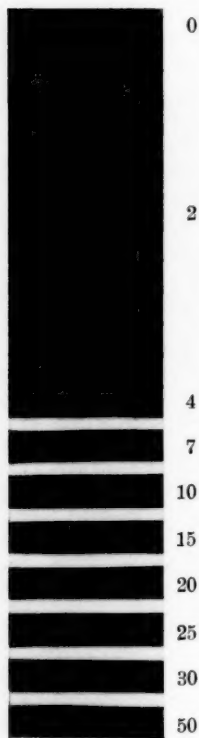


Fig. 3. Filmbilder aus der Aufnahme eines Kurzschlußfunken. Silberdraht 50 mm lang; 0,2 mm Durchmesser; 80 Volt; 2 Ohm Vorschaltwiderstand; Aufnahme mit 3100 Bildern/sec.

Fig. 2: Kurz nach dem Entstehen des Lichtbogens beginnt der Draht in einzelne Teile zu zerfallen, die, wie das 7. Bild von oben zeigt, vom Lichtbogen noch überbrückt werden. Nach etwa 1 msec, also viel kürzerer Zeit als beim ersten Versuch, ist der Lichtbogen schon erloschen. Der Zerfall des Drahtes in kleine Kügelchen setzt sich aber noch fort. Im weiteren Verlauf bemerkt man den eigenartigen Vorgang, daß sich mehrere nebeneinander schwebende Kügelchen einander nähern, um sich schließlich zu größeren Kugeln zu vereinigen. Dieses eigenartige Verhalten ist, wie weitere Aufnahmen (vgl. auch Fig. 3) zeigten, nichts Zufälliges.

Fig. 3: Der Lichtbogen lag bei der Aufnahme ganz außerhalb des Bildfeldes. Der Draht zerfällt im Laufe von 2 bis 4 msec in Kügelchen; ebenso wie beim vorigen Versuch vereinigen sich mehrere nebeneinander schwebende Kügelchen, je nach Größe und Lage der einzelnen Kügelchen, nach kürzeren (z. B. 1 msec) oder längeren Zeitabschnitten (bis zu 50 msec).

Das Ergebnis der Aufnahmen läßt sich wie folgt zusammenfassen:

1. Die von Kleen gefundene Unduloidbildung beim Kurzschlußfunken wird durch kinematographische Aufnahmen des Vorganges mit einigen tausend Bildern in der Sekunde bestätigt.

2. Das Auftreten wesentlich größerer Kügelchen, als der Unduloidtheorie entspricht, findet seine Erklärung durch eine Vereinigung mehrerer kleinerer Kügelchen zu größeren Komplexen.

Berlin-Reinickendorf.

(Eingegangen 9. Mai 1933)

**Berichtigung zu meiner Arbeit:  
Polarisationserscheinungen bei der stufenweisen  
Anregung von Quecksilberfluoreszenz<sup>1)</sup>**

**Von E.-F. Richter**

Bei der Aufstellung der Formeln für die Drehung der Polarisationsebene für die Linien 4358 und 5461 auf Seite 321 der Arbeit sind die  $\pi$ -Komponenten der Zeemanaufspaltung versehentlich mit berücksichtigt worden. Sie wirken bei Beobachtung parallel zum Feld jedoch nicht mit. Herr Dr. W. Berg (Berlin) war so freundlich, mich auf diesen Fehler aufmerksam zu machen. Die Formeln nehmen berichtigt folgende, einfachere Gestalt an:

$$(1) \tan 2 \varphi_{4047} = 2 \, o \, \tau \cdot g$$

$$(2) \tan 2 \varphi_{4358} = 2 \, o' \tau' g'$$

$$(3) \tan 2 \varphi_{5461} = 2 \frac{a_1^2 \cdot \frac{v_1}{\alpha^2 + 4 v_1^2} + a_1 a_2 \cdot \frac{v_1 + v_2}{\alpha^2 + (v_1 + v_2)^2} + a_2^2 \cdot \frac{v_2}{\alpha^2 + 4 v_2^2}}{a_1^2 \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4 v_1^2} + 2 a_1 a_2 \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + (v_1 + v_2)^2} + a_2^2 \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4 v_2^2}}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Larmorpräzession  $o$  berechnet sich nach der Formel:

$$o = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{\mathfrak{H}}{c}.$$

Die ursprüngliche Übereinstimmung der Meßergebnisse mit denen von Randall<sup>2)</sup> wird durch die Berichtigung insofern gestört, als die Absolutwerte der Lebensdauern nunmehr differieren, das Verhältnis  $\tau_{4047} : \tau_{4358}$  bleibt jedoch wie früher innerhalb der Fehlergrenze 1:1. Um das überraschende Ergebnis für die Lebensdauer der grünen Linie zu prüfen, wurden die Spektrogramme mit einem Zeiss'schen Registrierphotometer ausgemessen, wodurch gegenüber der in der Arbeit angewandten Einstellung auf maximale bzw. minimale Schwärzung der Streifen im Photometer mit Handbetrieb eine größere Genauigkeit und bessere Abschätzungsmöglichkeit der Versuchsfehler erreicht

1) E.-F. Richter, Ann. d. Phys. [5] **7**. S. 293. 1930.

2) R. H. Randall, Phys. Rev. **35**. S. 1161. 1930.

wurde. Für die Lebensdauern ergeben sich dann die folgenden Mittelwerte:

$$\tau_{4047} = 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ sec}$$

$$\tau_{4358} = 0,6 \cdot 10^{-8} \text{ sec}$$

$$\tau_{5461} = 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ sec.}$$

Die durch Depolarisation gemessenen Werte erfahren eine sinngemäße Änderung. Die Meßgenauigkeit für  $\tau_{5461}$  stellt sich bei den Registrierungen jedoch als recht unbefriedigend heraus, zumal die Linie im feldfreien Fall einen Polarisationsgrad von nur 12,6% erreicht. Es zeigt sich, daß die Einzelwerte für  $\tau$  von  $0,4 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$  bis  $0,43 \cdot 10^{-8} \text{ sec}$  streuen.

Es kann also mit der angewandten Methodik, die — wie bereits in der Arbeit hervorgehoben wurde — angewandt wurde, „um eine ungefähre Orientierung zu geben“, nicht mit absoluter Sicherheit zwischen Gleichheit und Verschiedenheit der Lebensdauern des Triplets  $2^3P_{012}$ - $2^3S_1$  bei Quecksilber unterschieden werden.

Berlin-Reinickendorf.

(Eingegangen 2. April 1933)